ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

3

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1883.
CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

REDACTION

ACTA MATHEMATICA, 3. 1883/1884.

INHALT. TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

SUR LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS HYPERELLIPTIQUES DE PREMIER ORDRE. Par Martin Krause.

Page 177 l. 9, 10, au lieu de:

$m^2 + 3\mu^2$ et chaque nombre représenté deux fois par l'une des formes le sera aussi par l'autre

lire:

$m^2 + 3\mu^2$, de telle sorte que chaque nombre représenté par la seconde forme le sera d'une double manière par la première.

SUR LES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE. Par C. Le Paige.

Page 192 l. 8 en remontant, au lieu de:

trois de ses sommets parcourent

lire:

les trois arêtes de cette face s'appuient sur

ÜBER DIE EINER BELIEBIGEN DIFFERENTIALGLEICHUNG
ERSTER ORDNUNG ANGEHÖRIGEN
SELBSTÄNDIGEN TRANSCENDENTEN

VON

LEO KOENIGSBERGER
in WIEN.

Einer homogenen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung gehören bekanntlich höchstens m algebraisch von einander unabhängige Transcendenten als Integrale an, indem jedes Integral sich als homogene lineare Function von m Fundamentalintegralen ausdrücken lässt; ähnliches gilt für jede lineare nicht homogene Differentialgleichung beliebiger Ordnung, und ich habe diese Frage, welche identisch ist mit der Untersuchung des algebraischen Zusammenhanges zwischen dem allgemeinen und einer bestimmten Anzahl von particulären Integralen, wenigstens für diejenigen Fälle, in welchen in jenen algebraischen Zusammenhang für Differentialgleichungen erster Ordnung nur 1, 2 oder 3 particuläre Integrale eintreten, schon früher behandelt [1]. Ich lege mir nunmehr das Problem ganz allgemein vor, *sämmtliche Differentialgleichungen*

$$F\left(x,\ z,\ \frac{dz}{dx}\right) = 0 \tag{1}$$

anzugeben, für welche sich alle Integrale durch n selbständige nicht algebraisch mit einander verbundene Transcendenten und durch nicht weniger algebraisch ausdrücken lassen oder anders ausgesprochen, *welche nur n algebraisch von einander unabhängige transcendente Integrale besitzen,* oder endlich auch, da in das allgemeine Integral eine willkührliche Constante eintreten muss, *alle*

[1] »Über den Zusammenhang zwischen dem allgemeinen und den particulären Integralen von Differentialgleichungen», Journal f. Math. B. 91, H. 4, und in meinem Buche »Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen», § 9.

Differentialgleichungen (1) *zu charakterisiren, für welche das allgemeine Integral* z *eine algebraische Function von* n *algebraisch von einander unabhängigen transcendenten Integralen* $z_1, z_2, \ldots z_n$, *der unabhängigen Variabeln* x *und einer willkührlichen Constanten*

$$z = f(x, z_1, z_2, \ldots z_n, c) \tag{2}$$

ist, wobei angenommen werden darf, dass n die kleinste Anzahl der von einander unabhängigen transcendenten Integrale ist, für welche diese Darstellung möglich ist.

Setzen wir die Gleichung (1) in die Form

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x, z), \tag{3}$$

wodurch ein in $\frac{dz}{dx}$ irreductibler Factor von (1) dargestellt sein mag, so ergiebt sich vermöge der für diesen Factor geltenden Voraussetzung (2)

$$\varphi(x, f(x, z_1, z_2, \ldots z_n, c)) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z_1}\varphi(x, z_1) + \frac{\partial f}{\partial z_2}\varphi(x, z_2) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z_n}\varphi(x, z_n), \tag{4}$$

und da wir angenommen haben, dass zwischen $x, z_1, z_2, \ldots z_n$ nicht schon selbst ein algebraischer Zusammenhang stattfinden soll, so wird diese Gleichung eine in $x, z_1, z_2, \ldots z_n, c$ identische sein müssen, worin die einzelnen φ-Functionen Zweige der algebraisch vieldeutigen Function $\varphi(x, z)$ darstellen werden. Differentiirt man die Gleichung (4) nach einer der Variabeln z_ρ und der willkührlichen Constanten c, was wegen ihrer Identität für alle Werthe dieser Variabeln gestattet ist, so erhält man die Beziehungen

$$\begin{aligned}(5)\qquad &\frac{\partial\varphi(x, f(x, z_1, \ldots z_n, c))}{\partial f(x, z_1, \ldots z_n, c)} \frac{\partial f(x, z_1, \ldots z_n, c)}{\partial z_\rho} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z_\rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_\rho}\varphi(x, z_1) + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial z_n \partial z_\rho}\varphi(x, z_n) + \frac{\partial f}{\partial z_\rho}\frac{\partial \varphi(x, z_\rho)}{\partial z_\rho}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(6)\qquad &\frac{\partial\varphi(x, f(x, z_1, \ldots z_n, c))}{\partial f(x, z_1, \ldots z_n, c)} \frac{\partial f(x, z_1, \ldots z_n, c)}{\partial c} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial c}\varphi(x, z_1) + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial z_n \partial c}\varphi(x, z_n),\end{aligned}$$

und durch Elimination von $\frac{\partial\varphi(x, f(x, z_1, \ldots z_n, c))}{\partial f(x, z_1, \ldots z_n, c)}$ zwischen diesen beiden Gleichungen

$$(7)\qquad \frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z_\rho}-\frac{\partial f}{\partial z_\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial c}+\varphi(x, z_1)\left\{\frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial^2 f}{\partial z_1\partial z_\rho}-\frac{\partial f}{\partial z_\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial z_1\partial c}\right\}+\ldots$$

$$+\varphi(x, z_n)\left\{\frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial^2 f}{\partial z_n\partial z_\rho}-\frac{\partial f}{\partial z_\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial z_n\partial c}\right\}+\frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial f}{\partial z_\rho}\frac{\partial\varphi(x, z_\rho)}{\partial z_\rho}=0$$

oder auch

$$(8)\qquad \frac{\partial\varphi(x, z_\rho)}{\partial z_\rho}+\frac{\partial}{\partial x}\log\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right\}+\sum_{1}^{n}{}_{\mu}\,\varphi(x, z_\mu)\frac{\partial}{\partial z_\mu}\log\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right\},$$

welche Gleichung wiederum für alle Werthe der Variabeln identisch erfüllt sein muss. Setzen wir $\varphi(x, z_\rho) = Z_\rho$, fassen Z_ρ nur als Function von z_ρ auf und setzen die Gleichung (8) in die Form

$$(9)\qquad \frac{dZ_\rho}{dz_\rho}+Z_\rho\frac{\partial}{\partial z_\rho}\log\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right\}=-\frac{\partial}{\partial x}\log\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right\}-\sum_{1}^{n}{}_{\mu}^{(\rho)}\varphi(x, z_\mu)\frac{\partial}{\partial z_\mu}\log\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right\},$$

worin das der Summe angefügte (ρ) bedeuten soll, dass $\mu=\rho$ auszuschliessen ist, so giebt die Integration der in Z_ρ und z_ρ linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(10)\qquad Z_\rho = \mathsf{L}\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}-\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}\int\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\frac{\partial}{\partial x}\log\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right\}+\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\sum_{1}^{n}{}_{\mu}^{(\rho)}\varphi(x, z_\mu)\frac{\partial}{\partial z_\mu}\log\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right\}\right]dz_\rho,$$

worin L eine im allgemeinen von $x, z_1, z_2, \ldots z_n$ (z_ρ ausgeschlossen) und c abhängige Function sein wird, oder

$$(11)\qquad \varphi(x, z_\rho) = \mathsf{L}\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}-\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}\int\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right\}dz_\rho-\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}\sum_{1}^{n}{}_{\mu}^{(\rho)}\varphi(x, z_\mu)\int\frac{\partial}{\partial z_\mu}\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right\}dz_\rho,$$

in welchem Ausdrucke für $\varphi(x, z_\rho)$ auf der rechten Seite die Werthe $z_1, \ldots z_{\rho-1}, z_{\rho+1}, \ldots z_n, c$ völlig willkührlich gewählt werden können, (1) oder auch symmetrischer geschrieben:

---

(1) Es mag nur noch bemerkt werden, dass die willkührliche Wahl dieser Grössen so zu verstehen ist, dass ihnen allgemeine, völlig von einander unabhängige Werthe beigelegt werden können, dass jedoch die Festsetzung gewisser Beziehungen zwischen ihnen zu unendlichen oder unbestimmten Ausdrücken führen kann, welche erst wieder durch eine bestimmte Wahl von L beseitigt werden könnten; wir wollen dies an einem Beispiel erläutern. Für die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} = \omega(x)z^2 + A(x)z + \pi(x),$$

in welcher $\omega(x)$, $A(x)$, $\pi(x)$ beliebige algebraische Functionen von x bedeuten, findet zwischen dem allgemeinen und 3 ihrer particulären Integrale (s. meine »allg. Untersuchungen aus der Theorie der Diff.-gleichungen», S. 99) die Beziehung statt

$$z = \frac{c_3 z_1(z_2 - z_3) + c z_2(z_3 - z_1)}{c_3(z_2 - z_3) + c(z_3 - z_1)}.$$

und da in diesem Falle für die oben gewählten Bezeichnungen sich für $\rho = 1$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} = \frac{(z_3 - z_1)(z_2 - z_1)}{(c_3 - c)(z_2 - z_3)}$$

ergiebt, so geht die Gleichung (11) in

$$\varphi(x, z_1) = \mathsf{L}\frac{(z_3 - z_1)(z_2 - z_1)}{(c_3 - c_1)(z_2 - z_3)} - \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3}\varphi(x, z_2) - \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}\varphi(x, z_3)$$

über, also in der That in einen Ausdruck von der Form $\omega(x)z^2 + A(x)z + \pi(x)$; setzt man aber z. B. $z_2 = z_3$, so würden die einzelnen Posten unendlich werden, und bringt man die letzte Gleichung in die Form

$$(z_2 - z_3)\varphi(x, z_1) + (z_3 - z_1)\varphi(x, z_2) + (z_1 - z_2)\varphi(x, z_3) = \mathsf{L}\frac{(z_3 - z_1)(z_2 - z_1)}{c_3 - c_1},$$

so folgt in der That, wenn $\varphi(x, z) = \omega(x)z^2 + A(x)z + \pi(x)$ eingesetzt wird, wie unmittelbar zu sehen

$$\mathsf{L} = (c_3 - c_1)\omega(x)(z_2 - z_3),$$

so dass die durch Gleichsetzen von z_2 und z_3 hervorgebrachte Unendlichkeit aus dem Ausdrucke für $\varphi(x, z_1)$ wieder herausfällt.

$$\sum_{1}^{n}{}_{\mu}\,\varphi(x,\ z_\mu)\frac{\partial}{\partial z_\mu}\int\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\,dz_\rho = -\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\,dz_\rho,$$

worin ρ irgend eine der Zahlen $1 \ldots n$ sein darf.

Wir können an diese für die rechte Seite der Differentialgleichung (3) gefundene Form schon einige allgemeine Schlüsse knüpfen. Da unter der Annahme, dass nicht schon zwischen $x,\ z_1,\ z_2, \ldots z_n$ ein algebraischer Zusammenhang stattfinde, die Gleichung (4) für alle Werthe von $x,\ z_1, z_2, \ldots z_n$, c identisch befriedigt sein musste, so wird sie also auch bestehen, wenn man für $z_1,\ z_2, \ldots z_n$ willkührliche andere Integrale $Z_1,\ Z_2, \ldots Z_n$ der Differentialgleichung (3) einsetzt, und somit

$$(12)\qquad \varphi(x, f(x, Z_1, Z_2, \ldots Z_n, c)) = \frac{\partial f(x,\ Z_1, \ldots Z_n,\ c)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,\ Z_1, \ldots Z_n,\ c)}{\partial Z_1}\varphi(x,\ Z_1)$$
$$+ \cdots + \frac{\partial f(x,\ Z_1, \ldots Z_n,\ c)}{\partial Z_n}\varphi(x,\ Z_n)$$

sein; da aber

$$(13)\qquad \varphi(x,\ Z_\rho) = \frac{dZ_\rho}{dx}$$

ist, so ergiebt sich

$$(14)\qquad \frac{\partial f(x,\ Z_1, \ldots Z_n,\ c)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,\ Z_1, \ldots Z_n,\ c)}{\partial Z_1}\frac{dZ_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial f(x,\ Z_1, \ldots Z_n,\ c)}{\partial Z_n}\frac{dZ_n}{dx}$$
$$= \varphi(x,\ f(x,\ Z_1, \ldots Z_n,\ c))$$

oder

$$(15)\qquad \frac{df(x,\ Z_1, \ldots Z_n,\ c)}{dx} = \varphi(x,\ f(x,\ Z_1, \ldots Z_n,\ c)),$$

woraus folgt, dass wiederum

$$(16)\qquad Z = f(x,\ Z_1, \ldots Z_n,\ c)$$

ein Integral der Differentialgleichung (3) ist, und zwar wird es das allgemeine Integral derselben sein, wenn durch Einsetzen der Integrale

$Z_1, \ldots Z_n$ in $f(x, z_1, \ldots z_n, c)$ statt der Grössen $z_1, \ldots z_n$ die willkührliche Constante c nicht herausfällt [1]. Wir erhalten somit den folgenden Satz, welcher als ein specieller Fall des von mir bewiesenen Satzes (s. allg. Untersuchungen etc. Kapitel II) von der Erhaltung der algebraischen Beziehung

---

[1] Es mögen hier noch einige Bemerkungen zu dem eben bewiesenen Satze Platz finden, die theils zum allgemeinen Verständnisse desselben nöthig sind, theils noch zum Zwecke anderer Betrachtungen im Laufe dieser Arbeit verwerthet werden. Da man in der Beziehung

$$(\alpha) \qquad z = f(x, z_1, z_2, \ldots z_n, c)$$

für z_1 irgend ein anderes Integral setzen darf, wenn nur für z ein anderes passendes Integral substituirt wird, so kann man auch $z_2 = z_1$ annehmen; da man jedoch vorausgesetzt hat, dass das allgemeine Integral sich nicht schon durch x und $n - 1$ particuläre Integrale algebraisch ausdrücken lassen soll, andererseits aber z doch wieder nach dem bewiesenen Satze ein Integral der Differentialgleichung bleibt, so folgt, dass, wenn man in dem Ausdrucke (α) zwei Integrale der rechten Seite einander gleich setzt, die Constante c von selbst herausfallen muss, und die Beziehung (α) eine identische sein wird, und dies ist eine charakteristische Eigenschaft jener algebraischen Relation; so wird die für die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = \omega(x)z^2 + A(x)z + \pi(x)$$

geltende Beziehung

$$z = \frac{c_3 z_1(z_2 - z_3) + c z_2(z_3 - z_1)}{c_3(z_2 - z_3) + c(z_3 - z_1)},$$

weil z sich nicht schon durch x, z_1 und z_2 algebraisch ausdrücken lässt, für die Substitution $z_2 = z_1$ in $z = z_1$ übergehen, also in eines der particulären Integrale. Eine weitere Bemerkung, die ebenso wie die frühere, vorzüglich im Hinblicke auf die analogen Untersuchungen für Differentialgleichungen höherer Ordnung gemacht werden mag, bezieht sich auf den Fall, dass die Differentialgleichung algebraische Integrale besitzt; man sieht sogleich, dass, wenn man in (α) dem c denjenigen Werth giebt, welcher das allgemeine Integral z in das particuläre algebraische Integral überführt, sich schon zwischen $z_1, z_2, \ldots z_n$ und x eine algebraische Beziehung der Voraussetzung widerstreitend ergeben würde, es muss der entsprechende Werth von c in diesem Falle also stets derart sein, dass die entstehende Relation an sich eine identisch wird. So liefert nach S. 82 meines Buches die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = Az^2 + Bz + C,$$

worin A, B, C algebraische Functionen von x bedeuten, für den Fall, dass dieselbe zwei

zwischen Integralen von Differentialgleichungen betrachtet werden kann, aber, wie man durch Vergleichung mit dem allgemeinen Theoreme sieht, für Differentialgleichungen erster Ordnung eine völlige Willkühr aller Integrale bis auf eines gestattet:

Findet zwischen dem allgemeinen Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung und n algebraisch von einander unabhängigen particulären Integralen derselben, der unabhängigen Variabeln und einer willkührlichen Constanten eine algebraische Beziehung statt, so darf man n der Integrale

---

particuläre algebraische Integrale ξ_1 und ξ_2 besitzt, die folgende Beziehung zwischen dem allgemeinen z und einem particulären Integrale z_0

$$(\beta) \qquad z = \frac{(c_0\xi_1 - c\xi_2)z_0 + (c - c_0)\xi_1\xi_2}{(c_0 - c)z_0 + (c\xi_1 - c_0\xi_2)},$$

und setzt man hierin $z = \xi_1$, so folgt unmittelbar

$$c\xi_1(z_0 - \xi_1) = c\xi_2(z_0 - \xi_1)$$

d. h. $c = 0$, und für diesen Werth der Constanten fällt z_0 ganz aus der Beziehung heraus.

Andererseits ist klar, dass, wenn man in (α) irgend eines der Integrale $z_1, z_2, \ldots z_n$ durch ein algebraisches Integral der Differentialgleichung ersetzt, die Constante c von selbst herausfallen muss, weil sonst das allgemeine Integral wieder algebraisch durch nur $n - 1$ Integrale ausdrückbar sein würde; so wird, wenn in (β) $z_0 = \xi_1$ gesetzt wird, $z = \xi_1$, also wieder eines jener particulären algebraischen Integrale. Es mag noch hinzugefügt werden, dass sich die Relation (β), wie man unmittelbar sieht, in die Form setzen lässt

$$(\gamma) \qquad \frac{z - \xi_1}{z - \xi_2} = \frac{c}{c_0}\,\frac{z_0 - \xi_1}{z_0 - \xi_2},$$

woraus folgt, dass, wenn

$$(\delta) \qquad \frac{z - \xi_1}{z - \xi_2} = Z, \quad \frac{z_0 - \xi_1}{z_0 - \xi_2} = Z_0$$

gesetzt wird, die Beziehung in

$$(\varepsilon) \qquad Z = \frac{c}{c_0} Z_0,$$

mithin in einen von x freien Zusammenhang übergeht, in welchem das allgemeine und ein particuläres Integral der durch die Substitution (δ) hervorgehenden Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dZ}{dx} = A(\xi_1 - \xi_2)Z$$

stehen.

durch willkührliche andere, die aber mit den früheren zum Theil übereinstimmen können, ersetzen, immer wird ein $(n+1)^{tes}$ Integral der Differentialgleichung existiren, welches mit den n neu gewählten wieder denselben Functionalausdruck befriedigt.

Setzt man nunmehr in (2) $z = z_1$, so wird nur eines der Integrale der rechten Seite z. B. z_1 durch ein anderes zu ersetzen sein, und da jedes andere wiederum nach (2) die Form hat

$$f(x,\ z_1,\ z_2, \ldots z_n,\ k),$$

worin k irgend einen constanten, hier einen im Allgemeinen von c abhängigen Werth haben wird, so wird die Gleichung

$$z = f(x,\ z_1,\ z_2, \ldots z_n,\ c) \tag{17}$$

die Beziehung

$$z_1 = f\{x,\ f(x,\ z_1,\ z_2, \ldots z_n,\ k),\ z_2, \ldots z_n,\ c\} \tag{18}$$

hervorrufen [1], welche, da $z_1, z_2, \ldots z_n$ nicht schon selbst in einem algebraischen Zusammenhange stehen sollten, eine identische sein muss.

---

[1] So wird, wenn in der in der vorigen Anmerkung gegebenen Beziehung

$$z = \frac{c_3 z_1(z_2 - z_3) + c z_2(z_3 - z_1)}{c_3(z_2 - z_3) + c(z_3 - z_1)}$$

z durch z_1 ersetzt wird, wie unmittelbar zu sehen,

$$z_1 = \frac{c_3 z_1(z_2 - z_3) + k z_2(z_3 - z_1)}{c_3(z_2 - z_3) + k(z_3 - z_1)}$$

zu substituiren sein, worin

$$k = \frac{c c_3}{c - c_3}$$

ist. Es mag hier noch folgende Eigenschaft einer algebraischen Beziehung zwischen dem allgemeinen und einer Anzahl von particulären Integralen Erwähnung finden. Sei die algebraische Beziehung wieder

$$z = f(x,\ z_1,\ z_2, \ldots z_n,\ c) \tag{α}$$

oder

$$z^\lambda + f_1(x,\ z_1,\ z_2, \ldots z_n,\ c) z^{\lambda-1} + \cdots + f_\lambda(x,\ z_1,\ z_2, \ldots z_n,\ c) = 0, \tag{β}$$

worin $f_1, f_2, \ldots f_n$ rationale Functionen der in ihnen enthaltenen Grössen sein mögen, und

Untersuchen wir nun zuerst den Fall, in welchem $f(x, z_1, z_2, \dots z_n, c)$ eine ganze Function der Grössen $z_1, z_2, \dots z_n$ darstellt, und denken uns dieselbe nach Potenzen von z_1 in der Form geordnet

(19)
$$f(x, z_1, z_2, \dots z_n, c)$$
$$= f_0(x, z_2, \dots z_n, c) z_1^{\mu} + f_1(x, z_2, \dots z_n, c) z_1^{\mu-1} + \dots + f_\mu(x, z_2, \dots z_n, c),$$

die in dem Sinne als irreductibel aufgefasst werden mag, dass sie sich nicht in Factoren zerlegen lässt, deren Coefficienten rational aus $x, z_1, z_2, \dots z_n$ zusammengesetzt sind, ohne Rücksicht auf etwa eintretende Constanten. Vertauscht man in (α) zwei der Integrale der rechten Seite mit einander z. B. z_1 und z_2, so wissen wir nach dem allgemeinen Satze von der Erhaltung der algebraischen Beziehung, dass, indem nur z_2 statt z_1 und z_1 statt z_2 gesetzt ist, nothwendig z wieder ein Integral, und da c im Allgemeinen nicht herausfällt, das allgemeine Integral der Differentialgleichung bleiben wird; setzen wir

(γ)
$$Z = f(x, z_2, z_1, z_3, \dots z_n, c),$$

so wird auch Z nach (α) in der Form darstellbar sein müssen

(δ)
$$Z = f(x, z_1, z_2, \dots z_n, k),$$

worin k eine Function von c sein wird. Nach (β) wird nun Z durch die irreductible Gleichung definirt sein

$$Z^\lambda + f_1(x, z_1, z_2, \dots z_n, k) Z^{\lambda-1} + \dots + f_\lambda(x, z_1, z_2, \dots z_n, k) = 0$$

und wird mit der nach (α) und (γ) bestehenden Gleichung

$$Z^\lambda + f_1(x, z_2, z_1, \dots z_n, c) Z^{\lambda-1} + \dots + f_\lambda(x, z_2, z_1, \dots z_n, c) = 0$$

eine Lösung gemein haben, also mit ihr identisch sein, und es wird somit für die rationalen Coefficienten der Gleichung (β) die Beziehung bestehen

(ε)
$$f_\nu(x, z_2, z_1, \dots z_n, c) = f_\nu(x, z_1, z_2, \dots z_n, k),$$

und eine Vertauschung der Grössen $z_1, z_2, \dots z_n$ daher keine Veränderung der rationalen Functionen hervorbringen, wenn nur statt c eine passende Constante k gesetzt wird; so wird die oben behandelte Relation

$$z = \frac{c_3 z_1(z_2 - z_3) + c z_2(z_3 - z_1)}{c_3(z_2 - z_3) + c(z_3 - z_1)},$$

die selbst schon rational ist, wenn z_1 mit z_2 vertauscht und c durch $k = \frac{c_3^2}{c}$ ersetzt wird, unverändert bleiben.

so dass sich also

$$(20) \qquad f(x, z_1, z_2, \ldots z_n, k)$$
$$= f_0(x, z_2, \ldots z_n, k) z_1^{\mu} + f_1(x, z_2, \ldots z_n, k) z_1^{\mu-1} + \cdots + f_\mu(x, z_2, \ldots z_n, k)$$

ergiebt, so folgt aus (18), (19) und (20)

$$(21) \qquad z_1 =$$
$$f_0(x, z_2, \ldots z_n, c)\{f_0(x, z_2, \ldots z_n, k) z_1^{\mu} + f_1(x, z_2, \ldots z_n, k) z_1^{\mu-1} + \ldots + f_\mu(x, z_2, \ldots z_n, k)\}^{\mu}$$
$$+ f_1(x, z_2, \ldots z_n, c)\{f_0(x, z_2, \ldots z_n, k) z_1^{\mu} + \ldots + f_\mu(x, z_2, \ldots z_n, k)\}^{\mu-1}$$
$$+ \ldots + f_\mu(x, z_2, \ldots z_n, c),$$

und hieraus, da die Gleichung eine für alle $z_1, z_2, \ldots z_n$ identische sein soll, wenn $\mu > 1$,

$$f_0(x, z_2, \ldots z_n, c) f_0(x, z_2, \ldots z_n, k)^{\mu} = 0;$$

da nun aber keiner der beiden Factoren verschwinden kann, weil k ebenso wie c, indem es eine von dieser Grösse abhängige Constante bedeutet, völlig willkührlich ist, so wird $\mu = 1$,[1] und also z eine ganze lineare Function von z_1 sein müssen, und da dasselbe auch von den anderen Grössen $z_2, z_3, \ldots z_n$ gilt, so wird z eine ganze lineare Function der n Grössen $z_1, z_2, \ldots z_n$ sein, die wir, ohne die Allgemeinheit des Resultats zu beeinträchtigen, nur der Kurze der Rechnung halber in der einfachsten Form voraussetzen wollen

$$(22) \qquad \begin{aligned} z = m_0 + m_1 z_1 &+ m_{12} z_1 z_2 + m_{13} z_1 z_3 + \cdots\cdots + m_{1n} z_1 z_n \\ + m_2 z_2 &+ m_{23} z_2 z_3 + \cdots\cdots + m_{2n} z_2 z_n \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\qquad + m_{n-1} z_{n-1} + m_{n-1n} z_{n-1} z_n \\ &\qquad\qquad + m_n z_n \\ &= f(x, z_1, z_2, \ldots z_n\, c), \end{aligned}$$

worin die Grössen m von x und c algebraisch abhängen.

Nachdem für diesen Fall die Gestalt der Function f der Gleichung (2) gefunden, wird wegen

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial m_0}{\partial c} + \frac{\partial m_1}{\partial c} z_1 + \frac{\partial m_{12}}{\partial c} z_1 z_2 + \cdots + \frac{\partial m_{1n}}{\partial c} z_1 z_n$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{\partial m_n}{\partial c} z_n$$

---

[1] und nach (21)

$$f_0(x, z_2, \ldots z_n, c) f_0(x, z_2, \ldots z_n, k) = 1.$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = m_1 + m_{12} z_2 + m_{13} z_3 + \cdots + m_{1n} z_n$$

der Gleichung (11) gemäss für $\rho = 1$

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial c}} = \frac{m_1 + m_{12} z_2 + m_{13} z_3 + \cdots + m_{1n} z_n}{\dfrac{\partial m_0}{\partial c} + \dfrac{\partial m_1}{\partial c} z_1 + \cdots + \dfrac{\partial m_{1n}}{\partial c} z_1 z_n + \cdots + \dfrac{\partial m_n}{\partial c} z_n},$$

also

$$\int \frac{\dfrac{\partial f}{\partial z_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial c}} dz_1$$

$$= \frac{m_1 + m_{12} z_2 + \cdots + m_{1n} z_n}{\dfrac{\partial m_1}{\partial c} + \dfrac{\partial m_{12}}{\partial c} z_2 + \cdots + \dfrac{\partial m_{1n}}{\partial c} z_n} \log \left\{ \frac{\partial m_0}{\partial c} + \frac{\partial m_1}{\partial c} z_1 + \cdots + \frac{\partial m_{1n}}{\partial c} z_1 z_n + \cdots + \frac{\partial m_n}{\partial c} z_n \right\}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial z_\mu} \int \frac{\dfrac{\partial f}{\partial z_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial c}} dz_1 = \mathbf{P} \log \mathbf{Q}$$

$$+ \frac{m_1 + m_{12} z_2 + \cdots + m_{1n} z_n}{\dfrac{\partial m_1}{\partial c} + \dfrac{\partial m_{12}}{\partial c} z_2 + \cdots + \dfrac{\partial m_{1n}}{\partial c} z_n} \cdot \frac{\dfrac{\partial m_\mu}{\partial c} + \dfrac{\partial m_{1\mu}}{\partial c} z_1 + \cdots + \dfrac{\partial m_{\mu-1\,\mu}}{\partial c} z_{\mu-1} + \dfrac{\partial m_{\mu\,\mu+1}}{\partial c} z_{\mu+1} + \cdots + \dfrac{\partial m_{\mu n}}{\partial c} z_n}{\dfrac{\partial m_0}{\partial c} + \dfrac{\partial m_1}{\partial c} z_1 + \cdots + \dfrac{\partial m_{1n}}{\partial c} z_1 z_n + \cdots + \dfrac{\partial m_n}{\partial c} z_n},$$

worin der logarithmische Posten nur seiner Form nach bezeichnet ist; daraus ergiebt sich

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial c}}{\dfrac{\partial f}{\partial z_1}} \frac{\partial}{\partial z_\mu} \int \frac{\dfrac{\partial f}{\partial z_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial c}} dz_1 = \mathbf{R} \log \mathbf{Q}$$

$$+ \frac{\dfrac{\partial m_\mu}{\partial c} + \dfrac{\partial m_{1\mu}}{\partial c} z_1 + \cdots + \dfrac{\partial m_{\mu-1\,\mu}}{\partial c} z_{\mu-1} + \dfrac{\partial m_{\mu\,\mu+1}}{\partial c} z_{\mu+1} + \cdots + \dfrac{\partial m_{\mu n}}{\partial c} z_n}{\dfrac{\partial m_1}{\partial c} + \dfrac{\partial m_{12}}{\partial c} z_2 + \dfrac{\partial m_{13}}{\partial c} z_3 + \cdots + \dfrac{\partial m_{1n}}{\partial c} z_n},$$

und ebenso, weil

$$\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}} dz_1 = \mathbf{S} \log \mathbf{Q}$$

$$+ \frac{m_1 + m_{12}z_2 + \cdots + m_{1n}z_n}{\frac{\partial m_1}{\partial c} + \frac{\partial m_{12}}{\partial c}z_2 + \cdots + \frac{\partial m_{1n}}{\partial c}z_n} \cdot \frac{\frac{\partial^2 m_0}{\partial c\partial x} + \frac{\partial^2 m_1}{\partial c\partial x}z_1 + \cdots + \frac{\partial^2 m_{1n}}{\partial c\partial x}z_1 z_n + \cdots + \frac{\partial^2 m_n}{\partial c\partial x}z_n}{\frac{\partial m_0}{\partial c} + \frac{\partial m_1}{\partial c}z_1 + \cdots + \frac{\partial m_{1n}}{\partial c}z_1 z_n + \cdots + \frac{\partial m_n}{\partial c}z_n}$$

ist,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} \frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}} dz_1 = \mathbf{T} \log \mathbf{Q} + \frac{\frac{\partial^2 m_0}{\partial c\partial x} + \frac{\partial^2 m_1}{\partial c\partial x}z_1 + \cdots + \frac{\partial^2 m_{1n}}{\partial c\partial x}z_1 z_n + \cdots + \frac{\partial^2 m_n}{\partial c\partial x}z_n}{\frac{\partial m_1}{\partial c} + \frac{\partial m_{12}}{\partial c}z_2 + \cdots + \frac{\partial m_{1n}}{\partial c}z_n}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (11) ein, so folgt, wenn man beachtet, dass $\varphi(x, z_1)$ eine algebraische Function von x und z_1 sein muss, die logarithmischen Glieder aus dem Endausdrucke also herausfallen müssen,

$$\varphi(x, z_1) = \mathbf{L} \cdot \frac{\frac{\partial m_0}{\partial c} + \frac{\partial m_1}{\partial c}z_1 + \frac{\partial m_{12}}{\partial c}z_1 z_2 + \cdots + \frac{\partial m_n}{\partial c}z_n}{m_1 + m_{12}z_2 + \cdots + m_{1n}z_n}$$

$$- \frac{\frac{\partial^2 m_0}{\partial c\partial x} + \frac{\partial^2 m_1}{\partial c\partial x}z_1 + \cdots + \frac{\partial^2 m_{1n}}{\partial c\partial x}z_1 z_n + \cdots + \frac{\partial^2 m_n}{\partial c\partial x}z_n}{\frac{\partial m_1}{\partial c} + \frac{\partial m_{12}}{\partial c}z_2 + \cdots + \frac{\partial m_{1n}}{\partial c}z_n}$$

$$-\sum_2^n{}_\mu \varphi(x, z_\mu) \frac{\frac{\partial m_\mu}{\partial c} + \frac{\partial m_{1\mu}}{\partial c}z_1 + \cdots + \frac{\partial m_{\mu-1\,\mu}}{\partial c}z_{\mu-1} + \frac{\partial m_{\mu\,\mu+1}}{\partial c}z_{\mu+1} + \cdots + \frac{\partial m_{\mu n}}{\partial c}z_n}{\frac{\partial m_1}{\partial c} + \frac{\partial m_{12}}{\partial c}z_2 + \frac{\partial m_{13}}{\partial c}z_3 + \cdots + \frac{\partial m_{1n}}{\partial c}z_n},$$

worin $\mathbf{L}$ von $x, z_2, z_3, \ldots z_n$ und c algebraisch abhängt. Setzt man nun, da die linke Seite der Gleichung nur von x und z_1 abhängt, $z_2, z_3, \ldots z_n$ gleich beliebigen Constanten, so folgt, dass für willkührliche z_1 die Function $\varphi(x, z_1)$ eine lineare ganze Function von z_1 bedeutet, und dass daher in diesem Falle die Differentialgleichung (3) die Form annimmt

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)z + \varphi_2(x),$$

für welche bekanntlich die gesuchte Relation zwischen dem allgemeinen und particulären Integralen für willkührliche Functionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ lautet (s. S. 90 der »allg. Untersuchungen»)

$$z = \frac{c - c_2}{c_1 - c_2} z_1 + \frac{c - c_1}{c_2 - c_1} z_2.$$

Wir erhalten somit den Satz:

Die einzige Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine ganze Function irgend einer Anzahl particulärer Integrale sein soll, deren Coefficienten von der willkührlichen Constanten und der unabhängigen Variabeln algebraisch abhängen, ist die der linearen.

Gehen wir jetzt zu dem allgemeineren Falle über, in dem sich z als rationale Function von $z_1, z_2, \ldots z_n$ ausdrücken lässt, deren Coefficienten algebraisch von x und c abhängen, so wird wiederum aus der Gleichung (18) unter der Voraussetzung, dass

$$f(x, z_1, z_2, \ldots z_n, c) = \frac{f_0(x, z_2, \ldots z_n, c) z_1^{\mu} + f_1(x, z_2, \ldots z_n, c) z_1^{\mu-1} + \cdots + f_\mu(x, z_2, \ldots z_n, c)}{\varphi_0(x, z_2, \ldots z_n, c) z_1^{\nu} + \varphi_1(x, z_2, \ldots z_n, c) z_1^{\nu-1} + \cdots + \varphi_\nu(x, z_2, \ldots z_n, c)}$$

ist, aus den auf S. 77 meiner »allg. Untersuchungen» angegebenen Gründen sich $\mu = \nu = 1$ ergeben, und da dies für alle Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ gilt, so erhält man die nothwendige Form einer solchen rationalen Beziehung als eine in allen particulären Integralen linear gebrochene Function

$$z = \frac{m_0 + m_1 z_1 + m_{12} z_1 z_2 + \cdots}{\mu_0 + \mu_1 z_1 + \mu_{12} z_1 z_2 + \cdots} = f(x, z_1, z_2, \ldots z_n, c),$$

oder kürzer geschrieben

$$z = \frac{A_0 + A_1 z_1}{B_0 + B_1 z_1}, \tag{23}$$

worin A_0, A_1, B_0, B_1 lineare ganze Functionen von $z_2, \ldots z_n$ und algebraische Functionen von x und c sind. Da nun aus (23) folgt, dass

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}} = \frac{A_1 B_0 - A_0 B_1}{z_1^2 \left[B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}\right] + z_1 \left[\left(B_1 \frac{\partial A_0}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_0}{\partial c}\right) + \left(B_0 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_0 \frac{\partial B_1}{\partial c}\right)\right] + \left(B_0 \frac{\partial A_0}{\partial c} - A_0 \frac{\partial B_0}{\partial c}\right)},$$

also

$$\int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}} dz_1 = \frac{A_1 B_0 - A_0 B_1}{\left(B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}\right)(a-b)} \log\left(\frac{z_1 - a}{z_1 - b}\right)$$

ist, worin a und b als Lösungen des obigen Nenners algebraische Functionen von $z_2, \ldots z_n$, x und c sind,(1) so erhält man

---

(1) Sind die beiden Lösungen a und b einander gleich, so wird

$$\int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}} dz_1 = \frac{A_0 B_1 - A_1 B_0}{B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}} \frac{1}{z_1 - a}$$

und daher

$$\frac{\partial}{\partial z_\mu} \int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}} dz_1 = \frac{A_0 B_1 - A_1 B_0}{B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}} \frac{\frac{\partial a}{\partial z_\mu}}{(z_1 - a)^2} + \frac{1}{z_1 - a} \frac{\partial}{\partial z_\mu} \left(\frac{A_0 B_1 - A_1 B_0}{B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}}\right)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}} dz_1 = \frac{A_0 B_1 - A_1 B_0}{B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}} \frac{\frac{\partial a}{\partial x}}{(z_1 - a)^2} + \frac{1}{z_1 - a} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_0 B_1 - A_1 B_0}{B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}}\right),$$

woraus sich

$$\varphi(x, z_1) = \mathsf{L} \frac{B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}}{A_1 B_0 - A_0 B_1} (z_1 - a)^2$$

$$+ \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}}{A_1 B_0 - A_0 B_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_0 B_1 - A_1 B_0}{B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}}\right)(z_1 - a)$$

$$+ \sum_2^n \varphi(x, z_\mu) \left| \frac{\partial a}{\partial z_\mu} - \frac{B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}}{A_1 B_0 - A_0 B_1} \frac{\partial}{\partial z_\mu} \left(\frac{A_0 B_1 - A_1 B_0}{B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}}\right)(z_1 - a) \right|$$

also wieder wie oben als eine ganze Function zweiten Grades in z_1 ergiebt.

$$\frac{\partial}{\partial z_\mu}\int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\, dz_1 = \mathsf{P}\log \mathsf{Q} +$$

$$\frac{(A_1B_0-A_0B_1)}{a-b}\;\frac{z_1\left[\frac{\partial b}{\partial z_\mu}-\frac{\partial a}{\partial z_\mu}\right]+\left(b\frac{\partial a}{\partial z_\mu}-a\frac{\partial b}{\partial z_\mu}\right)}{z_1^2\left[B_1\frac{\partial A_1}{\partial c}-A_1\frac{\partial B_1}{\partial c}\right]+z_1\left[\left(B_1\frac{\partial A_0}{\partial c}-A_1\frac{\partial B_0}{\partial c}\right)+\left(B_0\frac{\partial A_1}{\partial c}-A_0\frac{\partial B_1}{\partial c}\right)\right]+\left(B_0\frac{\partial A_0}{\partial c}-A_0\frac{\partial B_0}{\partial c}\right)}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\, dz_1 = \mathsf{S}\log \mathsf{Q}$$

$$+\frac{(A_1B_0-A_0B_1)}{a-b}\;\frac{z_1\left[\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial x}\right]+\left(b\frac{\partial a}{\partial x}-a\frac{\partial b}{\partial x}\right)}{z_1^2\left[B_1\frac{\partial A_1}{\partial c}-A_1\frac{\partial B_1}{\partial c}\right]+\cdots+\left(B_0\frac{\partial A_0}{\partial c}-A_0\frac{\partial B_0}{\partial c}\right)},$$

und hieraus nach (11), wenn man wiederum aus den angegebenen Gründen die logarithmischen Glieder fortlässt

$$\varphi(x, z_1) =$$

$$\frac{z_1^2\left[B_1\frac{\partial A_1}{\partial c}-A_1\frac{\partial B_1}{\partial c}\right]+z_1\left[\left(B_1\frac{\partial A_0}{\partial c}-A_1\frac{\partial B_0}{\partial c}\right)+\left(B_0\frac{\partial A_1}{\partial c}-A_0\frac{\partial B_1}{\partial c}\right)\right]+\left(B_0\frac{\partial A_0}{\partial c}-A_0\frac{\partial B_0}{\partial c}\right)}{A_1B_0-A_0B_1}$$

$$-\frac{z_1\left[\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial x}\right]+\left(b\frac{\partial a}{\partial x}-a\frac{\partial b}{\partial x}\right)}{a-b}-\sum_{2}^{n}{}_{\mu}\,\varphi(x, z_\mu)\frac{\left\{z_1\left[\frac{\partial b}{\partial z_\mu}-\frac{\partial a}{\partial z_\mu}\right]+\left(b\frac{\partial a}{\partial z_\mu}-a\frac{\partial b}{\partial z_\mu}\right)\right\}}{a-b},$$

also eine ganze Function zweiten Grades in der willkührlichen Grösse z_1, und es wird daher in diesem Falle die Differentialgleichung die Form annehmen

(24) $$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)z^2 + \varphi_2(x)z + \varphi_3(x),$$

worin $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ algebraische Functionen von x bedeuten; umgekehrt wissen wir aber auch nach S. 99 meines Buches, dass für alle Differentialgleichungen der Form (24) unabhängig von der Beschaffenheit

der Coefficienten eine lineargebrochene Beziehung statt hat, und wir erhalten somit den Satz:

Die einzige Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine rationale gebrochene Function irgend einer Anzahl particulärer Integrale sein soll, deren Coefficienten von der willkührlichen Constanten und der unabhängigen Variabeln algebraisch abhängen, ist die durch die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)z^2 + \varphi_2(x)z + \varphi_3(x)$$

dargestellte, und für alle diese besteht zwischen dem allgemeinen und drei particulären Integralen die Beziehung

$$z = \frac{c_3 z_1(z_2 - z_3) + c z_2(z_3 - z_1)}{c_3(z_2 - z_3) + c(z_3 - z_1)} \cdot \text{[1]} \tag{25}$$

[1] Es ist wohl nicht überflüssig zu bemerken, dass, wenn auch für die der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)z^2 + \varphi_2(x)z + \varphi_3(x) \tag{α}$$

zugehörigen 4 Integrale z, z_1, z_2, z_3 die durch die Gleichung (25) ausgedrückte Beziehung besteht, welche von dem expliciten x frei ist, doch unter gewissen Umständen das allgemeine Integral schon durch zwei particuläre Integrale in rationaler Form darstellbar sein kann, in welche jedoch die unabhängige Variable x explicite eintritt; denn bekanntlich geht die obige Differentialgleichung durch die Substitution

$$z = -\frac{1}{\varphi_1(x)} \frac{d \log u}{dx} \tag{β}$$

in die homogene lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu = 0 \tag{γ}$$

über, in welcher

$$P = -\left(\frac{\varphi'_1(x)}{\varphi_1(x)} + \varphi_2(x)\right), \qquad Q = \varphi_1(x)\varphi_3(x) \tag{δ}$$

ist, und es drückt sich das allgemeine Integral von (α) mit Hülfe zweier particulärer Integrale z_1, z_2 eben dieser Differentialgleichung und den beiden diesen entsprechenden particulären Integralen u_1, u_2 der Differentialgleichung (γ) in der Form aus

$$z = \frac{u_1 z_1 + c u_2 z_2}{u_1 + c u_2}. \tag{ε}$$

Die Untersuchung wäre somit für alle diejenigen Fälle abgeschlossen, in denen das allgemeine Integral sich als *rationale* Function irgend einer Anzahl von particulären Integralen ausdrücken lässt, deren Coefficienten algebraisch aus x und der willkührlichen Constanten zusammengesetzt sind; dass es aber noch ausserdem Differentialgleichungen erster Ordnung giebt, für welche das allgemeine Integral algebraisch, wenn auch nicht rational, aus einer Anzahl von particulären Integralen, der unabhängigen

---

worin c eine willkührliche Constante bedeutet. Wenn nun z. B. der Quotient der beiden Integrale u_1, u_2 eine algebraische Function, also

$$(\eta)\qquad \frac{u_2}{u_1} = \omega(x)$$

oder

$$(\zeta)\qquad z_1 - z_2 = \frac{\omega'(x)}{\omega(x)} \frac{1}{\varphi_1(x)}$$

ist, so wird (ε) in eine Beziehung der oben angegebenen Form übergehen

$$(\vartheta)\qquad z = \frac{z_1 + c\omega(x)z_2}{1 + c\omega(x)};$$

und zu dieser Form mag noch die folgende ergänzende Bemerkung hinzugefügt werden. Ich habe nämlich im § 9 meines Buches gezeigt, dass, wenn zwischen zwei Fundamentalintegralen einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und der unabhängigen Variabeln x irgend eine algebraische Beziehung stattfindet, dann auch zwei particuläre Fundamentalintegrale existiren, welche homogenen linearen algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen, also die Form haben müssen

$$U_1 = e^{\int \Omega_1(x)dx}, \qquad U_2 = e^{\int \Omega_2(x)dx},$$

worin $\Omega_1(x)$ und $\Omega_2(x)$ algebraische Functionen bedeuten; dann werden aber nach (β) die entsprechenden particulären Integrale der Differentialgleichung (α)

$$Z_1 = -\frac{\Omega_1(x)}{\varphi_1(x)}, \qquad Z_2 = -\frac{\Omega_2(x)}{\varphi_1(x)}$$

algebraische Functionen von x sein, und nach dem S. 82 meines Buches bewiesenen Satze drückt sich dann das allgemeine Integral schon mit Hülfe *eines* particulären in algebraischer Weise in der Form aus

$$z = \frac{(c_1Z_1 - cZ_2)z_1 + (c - c_1)Z_1Z_2}{(c_1 - c)z_1 + cZ_1 - c_1Z_2}.$$

Variabeln und einer willkührlichen Constanten zusammengesetzt ist, geht schon daraus hervor, dass eine willkührliche algebraische Substitution

$$z = F(x,\ Z) \tag{26}$$

auf die Differentialgleichung (24) ausgeübt dieselbe in eine andere algebraische Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dZ}{dx} = \Phi(x,\ Z) \tag{27}$$

überführt, für welche die algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen und drei particulären Integralen erhalten wird, wenn man den Ausdruck (26) für $z = z,\ z_1,\ z_2,\ z_3$ mit den entsprechenden Werthen $Z = Z,\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3$ in die oben gefundene rationale lineare Relation (25) einsetzt.

Man könnte nun zur Untersuchung der Möglichkeit einer beliebigen algebraischen Beziehung zwischen dem allgemeinen und n particulären Integralen wiederum von der Relation

$$z_1 = f\{x,\ f(x,\ z_1,\ z_2, \ldots z_n,\ k),\ z_2, \ldots z_n,\ c\}$$

ausgehen und, wie es eben für rationale Functionen geschehen, hier für algebraische Functionen nachweisen, dass dies nur für solche algebraische Functionen möglich ist, welche aus einer rationalen, also nach dem bisher bewiesenen aus einer rationalen linearen durch eine algebraische Substitution von der Form (26) abgeleitet sind, und für diesen Nachweis wäre es, wie schon aus den Betrachtungen über rationale Beziehungen ersichtlich ist, gleichgültig, ob x in die f-Function explicite eintritt oder nicht. Ich ziehe es aber vor, mich hier einer anderen Methode zu bedienen, um die Anwendung der Pfaff'schen Differentialgleichung auf derartige Probleme zu zeigen und die Untersuchung der Integrabilitätsbedingungen einmal an einer grösseren Klasse solcher Differentialgleichungen durchzuführen. Es wird nach dem obigen genügen, hier den Fall zu erörtern, in welchem die unabhängige Variable in jene algebraische Relation nicht explicite eintritt, die Function f in (2) also x nicht enthält; da dann in der Gleichung (11)

$$\int \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right) dz_\rho = 0$$

ist, so wird, wenn wir $z_1, z_2, \ldots z_n$ (z_ρ ausgeschlossen) willkührlichen Constanten gleichgesetzt denken, die Function $\varphi(x, z_\rho)$ die Form annehmen

$$\varphi(x, z_\rho) = \varphi_1(x)\psi_1(z_\rho) + \varphi_2(x)\psi_2(z_\rho) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z_\rho) \tag{28}$$

und *die nothwendige Form aller Differentialgleichungen, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function von n algebraisch von einander unabhängigen Integralen und der willkührlichen Constanten ist, in welche die unabhängige Variable nicht eintritt, ist somit*

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z) + \varphi_2(x)\psi_2(z) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z), \tag{29}$$

worin die rechts stehenden Functionen sämmtlich algebraisch sind.

Wir gehen nun auf eine genauere Untersuchung der Differentialgleichungen von der Form (29) ein, für welche zwischen dem allgemeinen und n particulären Integralen eine Beziehung

$$z = f(z_1, z_2, \ldots z_n, c) \tag{29.a}$$

existirt, in welcher die Variable x explicite nicht vorkommt. Beachtet man, dass für $z, z_1, \ldots z_n$ die Gleichungen bestehen

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dz}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z) + \varphi_2(x)\psi_2(z) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z) \\ \dfrac{dz_1}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z_1) + \varphi_2(x)\psi_2(z_1) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dz_n}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z_n) + \varphi_2(x)\psi_2(z_n) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z_n), \end{array}\right. \tag{30}$$

aus denen sich die Differentialgleichung zusammensetzt

$$\begin{vmatrix} dz & dz_1 & dz_2 \cdots & dz_n \\ \psi_1(z) & \psi_1(z_1) & \psi_1(z_2) \cdots & \psi_1(z_n) \\ \psi_2(z) & \psi_2(z_1) & \psi_2(z_2) \cdots & \psi_2(z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_n(z) & \psi_n(z_1) & \psi_n(z_2) \cdots & \psi_n(z_n) \end{vmatrix} = 0, \tag{31}$$

so kann man (30) als eine dieser Differentialgleichung genügende Bezie-

hung betrachten, für welche nur zu untersuchen ist, in wie weit die Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ als von einander unabhängig zu betrachten sind. Bildet man aus (30) das Totaldifferential

$$(32) \qquad dz = \frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} dz_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z_n} dz_n,$$

und setzt aus (30) und (32) die Ausdrücke für z und dz in die Differentialgleichung (31) ein, so ergiebt sich ein Ausdruck von der Form

$$(33) \qquad P_1 dz_1 + P_2 dz_2 + \cdots + P_n dz_n = 0,$$

in welchem $P_1, P_2, \ldots P_n$ algebraische Functionen von $z_1, z_2, \ldots z_n$ bedeuten. Wäre z ein Integral von den n unabhängigen Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n$, so müssten

$$(34) \qquad P_1 = 0 \quad P_2 = 0 \cdots P_n = 0$$

identisch befriedigt sein und umgekehrt; wir wollen beweisen, dass dies in der That im Allgemeinen der Fall ist. Denn seien die Grössen P alle oder zum Theil von Null verschieden, so wird die Gleichung (33) vermöge der Beziehungen (29.a) die Gestalt annehmen

$$(35) \qquad P_1\{\varphi_1(x)\psi_1(z_1) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z_1)\} + P_2\{\varphi_1(x)\psi_1(z_2) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z_2)\} + \cdots$$
$$\cdots + P_n\{\varphi_1(x)\psi_1(z_n) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z_n)\} = 0,$$

und diese Gleichung wird vermöge der Annahme, dass zwischen $z_1, z_2, \ldots z_n$ und x eine algebraische Beziehung nicht stattfinden sollte, eine für alle Werthe dieser Variabeln identische sein müssen. Differentiirt man nun dieselbe $n - 1$ mal nach einander nach x, so erhält man n lineare Gleichungen in den Grössen $P_1, P_2, \ldots P_n$, deren Determinante, wenn nicht sämmtliche P Null sind, verschwinden müsste; es wäre somit

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x)\psi_1(z_1) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z_1), & \varphi_1(x)\psi_1(z_2) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z_2), & \ldots \varphi_1(x)\psi_1(z_n) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z_n) \\ \varphi'_1(x)\psi_1(z_1) + \cdots + \varphi'_n(x)\psi_n(z_1), & \varphi'_1(x)\psi_1(z_2) + \cdots + \varphi'_n(x)\psi_n(z_2), & \ldots \varphi'_1(x)\psi_1(z_n) + \cdots + \varphi'_n(x)\psi_n(z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x)\psi_1(z_1) + \cdots + \varphi_n^{(n-1)}(x)\psi_n(z_1), & \varphi_1^{(n-1)}(x)\psi_1(z_2) + \cdots + \varphi_n^{(n-1)}(x)\psi_n(z_2), & \varphi_1^{(n-1)}(x)\psi_1(z_n) + \cdots + \varphi_n^{(n-1)}(x)\psi_n(z_n) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(36)\qquad \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \cdots & \varphi'_n(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \psi_1(z_1) & \psi_2(z_1) & \cdots & \psi_n(z_1) \\ \psi_1(z_2) & \psi_2(z_2) & \cdots & \psi_n(z_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_1(z_n) & \psi_2(z_n) & \cdots & \psi_n(z_n) \end{vmatrix} = 0,$$

so dass also für den Fall, dass nicht sämmtliche P verschwinden, die eine oder die andere dieser beiden Determinanten verschwinden müsste. Sei zuerst

$$(37)\qquad \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \cdots & \varphi'_n(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0,$$

so folgt nach einem bekannten Satze,(¹) dass zwischen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x)$

(¹) der von Herrn FROBENIUS herrührt und im Journal für Mathematik B. 77 bewiesen ist. Es mag hier bemerkt werden, dass man diesen Satz auch auf einem anderen, unmittelbar ersichtlichen Wege herleiten kann; es ist nämlich leicht einzusehen, dass man beliebige n Functionen von x

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x) \cdots \varphi_n(x)$$

stets als particuläre Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung darstellen kann, da, wenn man

$$(\alpha)\qquad y = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x)$$

setzt, worin $c_1, c_2, \ldots c_n$ willkührliche Constanten sein sollen, und diese Gleichung (α) n mal nach einander differentiirt, also

$$(\beta)\qquad \begin{cases} y' = c_1\varphi'_1(x) + c_2\varphi'_2(x) + \cdots + c_n\varphi'_n(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)} = c_1\varphi_1^{(n-1)}(x) + c_2\varphi_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n\varphi_n^{(n-1)}(x) \\ y^{(n)} = c_1\varphi_1^{(n)}(x) + c_2\varphi_2^{(n)}(x) + \cdots + c_n\varphi_n^{(n)}(x) \end{cases}$$

eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten von der Form

$$a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x) = 0 \tag{38}$$

besteht; setzt man den sich aus dieser Beziehung ergebenden Werth von $\varphi_n(x)$ in die Differentialgleichung (29) ein, so geht diese in

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\varphi_1(x)}{a_n}\{a_n\psi_1(z) - a_1\psi_n(z)\} + \frac{\varphi_2(x)}{a_n}\{a_n\psi_2(z) - a_2\psi_n(z)\} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\varphi_{n-1}(x)}{a_n}\{a_n\psi_{n-1}(z) - a_{n-1}\psi_n(z)\}$$

---

erhält, durch Elimination der Grössen 1, c_1, c_2, ... c_n aus den $n+1$ Gleichungen (α) und (β) die lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung herleitet

$$(\gamma) \qquad \begin{vmatrix} y & \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ y' & \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y^{(n-1)} & \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \\ y^{(n)} & \varphi_1^{(n)}(x) & \varphi_2^{(n)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0,$$

welche offenbar jedes y zum Integral haben wird, welches aus (α) durch willkührliche Wahl der Grössen c_1, c_2, ... c_n hervorgeht, also auch die Integrale $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... $\varphi_n(x)$; da nun aber der Coefficient von $y^{(n)}$

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

vermöge der Gleichung (37) verschwindet, so werden die Functionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... $\varphi_n(x)$ Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung sein, und es wird somit zwischen ihnen eine homogene lineare Beziehung von der Form (38) bestehen müssen.

über, deren rechte Seite somit nur aus der Summe von $n - 1$ Producten algebraischer x- und z-Functionen bestünde. Wird ferner die Determinante

$$\left|\begin{array}{llll} \psi_1(z_1) & \psi_2(z_1) \cdots \psi_n(z_1) \\ \psi_1(z_2) & \psi_2(z_2) \cdots \psi_n(z_2) \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \psi_1(z_n) & \psi_2(z_n) \cdots \psi_n(z_n) \end{array}\right| = 0, \tag{39}$$

so muss diese Gleichung der Voraussetzung gemäss eine in den Grössen $z_1, z_2, \ldots z_n$ identische sein, und man darf daher $z_2, z_3, \ldots z_n$ willkührlichen Constanten gleich setzen, woraus sich eine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten von der Form ergeben würde

$$a_1\psi_1(z_1) + a_2\psi_2(z_1) + \cdots + a_n\psi_n(z_1) = 0, \tag{40}$$

welche wiederum für jedes z_1 gelten müsste, und die Benutzung dieser Beziehung würde die Differentialgleichung in die Form

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} = \frac{a_n\varphi_1(x) - a_1\varphi_n(x)}{a_n}\psi_1(z) + \frac{a_n\varphi_2(x) - a_2\varphi_n(x)}{a_n}\psi_2(z) + \cdots \\ \cdots + \frac{a_n\varphi_{n-1}(x) - a_{n-1}\varphi_n(x)}{a_n}\psi_{n-1}(z) \end{aligned} \tag{41}$$

überführen — wir finden somit, dass in allen Fällen, in welchen nicht sämmtliche P der Gleichung (33) identisch verschwinden, die Differentialgleichung sich auf die Form bringen lassen muss

$$\frac{dz}{dx} = \Phi_1(x)\Psi_1(z) + \Phi_2(x)\Psi_2(z) + \cdots + \Phi_{n-\rho}(x)\Psi_{n-\rho}(z), \tag{42}$$

worin die Φ und Ψ wiederum algebraische Functionen bezeichnen, und nunmehr angenommen werden darf, dass weder zwichen den Φ noch zwischen den Ψ eine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten bestehe. Für den Fall also, dass sich die Differentialgleichung (29) nicht auf eine Differentialgleichung (42) mit weniger ähnlich gestalteten Summanden der rechten Seite zurückführen lässt, wird (30) ein mit einer willkührlichen Constanten behaftetes Integral der Differentialgleichung (29) mit den n von einander unabhängigen Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ liefern. Lässt sich jedoch die Differentialgleichung (29) auf (42) reduciren, so werden

je $n - \rho + 1$ Integrale derselben wiederum wie früher die $\rho + 1$ totalen Differentialgleichungen liefern

$$
(43) \qquad \begin{vmatrix} dz & dz_1 & dz_2 & \cdots & dz_{n-\rho} \\ \Psi_1(z) & \Psi_1(z_1) & \Psi_1(z_2) & \cdots & \Psi_1(z_{n-\rho}) \\ \Psi_2(z) & \Psi_2(z_1) & \Psi_2(z_2) & \cdots & \Psi_2(z_{n-\rho}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Psi_{n-\rho}(z) & \Psi_{n-\rho}(z_1) & \Psi_{n-\rho}(z_2) & \cdots & \Psi_{n-\rho}(z_{n-\rho}) \end{vmatrix} = 0,
$$

$$
(44) \qquad \left| \begin{array}{l} \begin{vmatrix} dz & dz_1 & dz_2 & \cdots & dz_{n-\rho+1} \\ \Psi_1(z) & \Psi_1(z_1) & \Psi_1(z_2) & \cdots & \Psi_1(z_{n-\rho+1}) \\ \Psi_2(z) & \Psi_2(z_1) & \Psi_2(z_2) & \cdots & \Psi_2(z_{n-\rho+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Psi_{n-\rho}(z) & \Psi_{n-\rho}(z_1) & \Psi_{n-\rho}(z_2) & \cdots & \Psi_{n-\rho}(z_{n-\rho+1}) \end{vmatrix} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \begin{vmatrix} dz & dz_1 & dz_2 & \cdots & dz_n \\ \Psi_1(z) & \Psi_1(z_1) & \Psi_1(z_2) & \cdots & \Psi_1(z_n) \\ \Psi_2(z) & \Psi_2(z_1) & \Psi_2(z_2) & \cdots & \Psi_2(z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Psi_{n-\rho}(z) & \Psi_{n-\rho}(z_1) & \Psi_{n-\rho}(z_2) & \cdots & \Psi_{n-\rho}(z_n) \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right.
$$

mit der Reihe der resp. Variabeln

$$
(\mathrm{V}) \qquad \left| \begin{array}{llllll} z & z_1 & z_2 & \ldots & z_{n-\rho-1} & z_{n-\rho} \\ z & z_1 & z_2 & \ldots & z_{n-\rho-1} & z_{n-\rho+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z_1 & z_2 & \ldots & z_{n-\rho-1} & z_n, \end{array} \right.
$$

und es fragt sich, wie der Ausdruck (30) als Integral des Systems dieser $\rho + 1$ totalen Differentialgleichungen mit $n + 1$ Variabeln aufzufassen ist. Setzt man den Werth für z aus (30) und

$$
dz = \frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} dz_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z_n} dz_n
$$

in die Gleichungen (43) und (44) ein, so erhält man die Beziehungen

$$(45)\qquad \left|\begin{array}{l} Z_{11}dz_1 + Z_{12}dz_2 + \cdots\cdots\cdots + Z_{1n}dz_n = 0 \\ Z_{21}dz_1 + Z_{22}dz_2 + \cdots\cdots\cdots + Z_{2n}dz_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_{\rho+1\,1}dz_1 + Z_{\rho+1\,2}dz_2 + \cdots + Z_{\rho+1\,n}dz_n = 0, \end{array}\right.$$

und wenn aus diesen $\rho + 1$ Gleichungen die ρ Differentialien

$$dz_{n-\rho+1},\quad dz_{n-\rho+2}, \ldots dz_n$$

eliminirt werden, so ergiebt sich eine totale Differentialgleichung

$$(46)\qquad T_1dz_1 + T_2dz_2 + \cdots + T_{n-\rho}dz_{n-\rho} = 0,$$

in welcher $T_1, T_2, \ldots T_{n-\rho}$ algebraische Functionen von $z, z_1, z_2, \ldots z_n$ sind. Wären nun die T-Grössen nicht identisch Null für alle Werthe dieser Variabeln, so folgte aus (46) mit Benutzung der Differentialgleichung (42)

$$(47)\quad T_1\{\Phi_1(x)\Psi_1'(z_1) + \cdots + \Phi_{n-\rho}(x)\Psi_{n-\rho}'(z_1)\} + T_2\{\Phi_1(x)\Psi_1'(z_2) + \cdots + \Phi_{n-\rho}(x)\Psi_{n-\rho}'(z_2)\}$$
$$+ \cdots + T_{n-\rho}\{\Phi_1(x)\Psi_1'(z_{n-\rho}) + \cdots + \Phi_{n-\rho}(x)\Psi_{n-\rho}'(z_{n-\rho})\} = 0,$$

welche wieder, weil der Fall, dass schon eine algebraische Relation zwischen $x, z_1, z_2, \ldots z_n$ besteht, ausgeschlossen war, identisch bestehen muss, und es wird daher genau wie oben durch successive Differentiation nach x sich ergeben, dass, wenn nicht alle T identisch verschwänden, zwischen den $n - \rho$ $\Phi(x)$-Grössen oder zwischen den $n - \rho$ $\Psi(z)$-Grössen eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten bestehen müsste, was als möglich ausgeschlossen ist, da die rechte Seite der Differentialgleichung (42) bereits auf die kleinste Anzahl von Summanden reducirt angenommen wurde. Es werden daher die identischen Beziehungen stattfinden

$$T_1 = 0,\quad T_2 = 0,\quad T_{n-\rho} = 0,$$

und somit $z_1, z_2, \ldots z_{n-\rho}$ unabhängige Variabeln sein; es ist daher (30) in diesem Falle ein mit einer willkührlichen Constanten behaftetes Integral mit $n - \rho$ willkührlichen Variabeln des Systems von $\rho + 1$ totalen Differentialgleichungen (43) und (44) von $n + 1$ Variabeln.

Fassen wir die beiden Fälle, von denen der erste ein specieller Fall des zweiten für $\rho = 0$ ist, zusammen, so erhalten wir den folgenden Satz:

Wenn eine Differentialgleichung erster Ordnung die Eigenschaft hat, dass zwischen ihrem allgemeinen Integrale und n ihrer particulären Integrale eine von einer willkührlichen Constanten abhängige, aber von der unabhängigen Variabeln x freie algebraische Beziehung von der Form statthat

$$z = f(z_1, z_2, \ldots z_n, c), \tag{48}$$

wobei vorausgesetzt wird, dass nicht schon zwischen $z_1, z_2, \ldots z_n$ und x eine algebraische Beziehung besteht, so hat die Differentialgleichung die Form

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z) + \varphi_2(x)\psi_2(z) + \cdots + \varphi_{n-\rho}(x)\psi_{n-\rho}(z), \tag{49}$$

in welcher angenommen werden darf, dass zwischen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_{n-\rho}(x)$ sowohl als zwischen $\psi_1(z), \psi_2(z), \ldots \psi_{n-\rho}(z)$ nicht mehr eine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten existirt, und es ist dann die Beziehung (48) *ein mit einer willkührlichen Constanten versehenes Integral des Systems von $\rho + 1$ totalen Differentialgleichungen von n Variabeln*

$$\begin{vmatrix} dz & dz_1 & \ldots & dz_{n-\rho} \\ \psi_1(z) & \psi_1(z_1) & \ldots & \psi_1(z_{n-\rho}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{n-\rho}(z) & \psi_{n-\rho}(z_1) & \ldots & \psi_{n-\rho}(z_{n-\rho}) \end{vmatrix} = 0, \ldots \begin{vmatrix} dz & dz_1 & \ldots & dz_n \\ \psi_1(z) & \psi_1(z_1) & \ldots & \psi_1(z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{n-\rho}(z) & \psi_{n-\rho}(z_1) & \ldots & \psi_{n-\rho}(z_n) \end{vmatrix} = 0, \tag{50}$$

welches $n - \rho$ unabhängige Variabeln enthält. Umgekehrt wird aber auch, wenn das System von Differentialgleichungen (50) *ein Integral von der Form* (48) *besitzt, jede Differentialgleichung erster Ordnung von der Form* (49), *was auch $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_{n-\rho}(x)$ für Functionen von x sein mögen, die Eigenschaft haben, dass das allgemeine Integral eine wie oben charakterisirte algebraische Function von n particulären Integralen ist,*

und dies letztere ist unmittelbar daraus ersichtlich, dass, wenn z das allgemeine und $z_1, z_2, \ldots z_n$ particuläre Integrale von (49) darstellen, aus den durch Einsetzen dieser Werthe in (49) hervorgehenden Differentialgleichungen sich die Reihe der Differentialgleichungen (50) ergiebt, für welche die Existenz eines Integrales der Form (48) angenommen wurde, das somit die verlangte Beziehung zwischen dem allgemeinen und n particulären Integralen liefert.

Beschäftigen wir uns zunächst mit dem Falle, in welchem $\rho = 0$ ist, und somit der Zusammenhang (48) einer Differentialgleichung von der Form zugehört

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z) + \varphi_2(x)\psi_2(z) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z), \tag{51}$$

für welche weder zwischen den $\varphi(x)$- noch zwischen den $\psi(z)$-Functionen eine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten stattfindet, und stellen die Frage, *in welchen Fällen die Differentialgleichung*

$$\begin{vmatrix} dz & dz_1 & dz_2 & \ldots dz_n \\ \psi_1(z) & \psi_1(z_1) & \psi_1(z_2) & \ldots \psi_1(z_n) \\ \psi_2(z) & \psi_2(z_1) & \psi_2(z_2) & \ldots \psi_2(z_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_n(z) & \psi_n(z_1) & \psi_n(z_2) & \ldots \psi_n(z_n) \end{vmatrix} = 0 \tag{52}$$

ein algebraisches Integral

$$z = f(z_1, z_2, \ldots z_n, c) \tag{53}$$

besitzt, worin c eine willkührliche Constante und $z_1, z_2, \ldots z_n$ von einander unabhängige Variable sind.

Bringen wir (52) auf die Form

$$R dz + R_1 dz_1 + R_2 dz_2 + \cdots + R_n dz_n = 0 \tag{54}$$

und setzen nach (53)

$$dz = \frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} dz_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z_n} dz_n$$

in diese Gleichung ein, so erhält man

$$\left(R\frac{\partial f}{\partial z_1} + R_1\right) dz_1 + \left(R\frac{\partial f}{\partial z_2} + R_2\right) dz_2 + \cdots + \left(R\frac{\partial f}{\partial z_n} + R_n\right) dz_n = 0,$$

deren Coefficienten der Annahme gemäss identisch verschwinden müssen, und es ergiebt sich somit

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = -\frac{R_1}{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial z_2} = -\frac{R_2}{R}, \ldots \frac{\partial f}{\partial z_n} = -\frac{R_n}{R},$$

woraus die Integrabilitätsbedingungen folgen

$$(55)\qquad \frac{\partial\left(\frac{R_1}{R}\right)}{\partial z_2} = \frac{\partial\left(\frac{R_2}{R}\right)}{\partial z_1}, \quad \frac{\partial\left(\frac{R_1}{R}\right)}{\partial z_3} = \frac{\partial\left(\frac{R_3}{R}\right)}{\partial z_1}, \ldots \frac{\partial\left(\frac{R_{n-1}}{R}\right)}{\partial z_n} = \frac{\partial\left(\frac{R_n}{R}\right)}{\partial z_{n-1}},$$

deren Anzahl $\frac{n(n-1)}{2}$ ist, oder auch

$$(56)\qquad R\left[\frac{\partial R_2}{\partial z_1} - \frac{\partial R_1}{\partial z_2}\right] + R_1\left[\frac{\partial R}{\partial z_2} - \frac{\partial R_2}{\partial z}\right] + R_2\left[\frac{\partial R_1}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial z_1}\right] = 0\,(^1)$$

und die ähnlich gestalteten, in denen nur die Combination 12 durch irgend eine andere $\alpha\beta$ zu ersetzen ist. Beachtet man nun, dass nach (52)

$$(57)\qquad R = \begin{vmatrix} \psi_1(z_1) & \psi_1(z_2) \ldots \psi_1(z_n) \\ \psi_2(z_1) & \psi_2(z_2) \ldots \psi_2(z_n) \\ \ldots & \ldots \\ \psi_n(z_1) & \psi_n(z_2) \ldots \psi_n(z_n) \end{vmatrix}, \qquad R_1 = -\begin{vmatrix} \psi_1(z) & \psi_1(z_2) \ldots \psi_1(z_n) \\ \psi_2(z) & \psi_2(z_2) \ldots \psi_2(z_n) \\ \ldots & \ldots \\ \psi_n(z) & \psi_n(z_2) \ldots \psi_n(z_n) \end{vmatrix},$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} \psi_1(z) & \psi_1(z_1) & \psi_1(z_3) \ldots \psi_1(z_n) \\ \psi_2(z) & \psi_2(z_1) & \psi_2(z_3) \ldots \psi_2(z_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_n(z) & \psi_n(z_1) & \psi_n(z_3) \ldots \psi_n(z_n) \end{vmatrix},$$

und dass, weil die Glieder je einer Verticalreihe immer nur von einer der Variabeln abhängig sind, das Differential einer jeden dieser Determinanten

---

(1) Bekanntlich können dieselben auch, wenn z durch z_0, R durch R_0 ersetzt und

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial z_\beta} - \frac{\partial R_\beta}{\partial z_\alpha} = (\alpha, \beta)$$

gesetzt wird, durch die Determinante ausgedrückt werden

$$\begin{vmatrix} (00) & (01) & (02) \\ (10) & (11) & (12) \\ R_0 & R_1 & R_2 \end{vmatrix} = 0$$

und die ähnlich gestalteten.

nach einer der Variabeln aus der entsprechenden Determinante erhalten wird, wenn man die entsprechenden Functionen einer Verticalreihe durch die Ableitungen derselben ersetzt, so geht die Gleichung (56) in

$$
(58)\quad
\begin{vmatrix}
\psi_1(z) & \psi'_1(z_1)+\psi'_1(z_2) & \psi_1(z_3)\dots\psi_1(z_n)\\
\psi_2(z) & \psi'_2(z_1)+\psi'_2(z_2) & \psi_2(z_3)\dots\psi_2(z_n)\\
\dots & \dots & \dots\\
\psi_n(z) & \psi'_n(z_1)+\psi'_n(z_2) & \psi_n(z_3)\dots\psi_n(z_n)
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
\psi_1(z_1) & \psi_1(z_2) & \psi_1(z_3)\dots\psi_1(z_n)\\
\psi_2(z_1) & \psi_2(z_2) & \psi_2(z_3)\dots\psi_2(z_n)\\
\dots & \dots & \dots\\
\psi_n(z_1) & \psi_n(z_2) & \psi_n(z_3)\dots\psi_n(z_n)
\end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix}
\psi_1(z_1) & \psi'_1(z_2)+\psi'_1(z) & \psi_1(z_3)\dots\psi_1(z_n)\\
\psi_2(z_1) & \psi'_2(z_2)+\psi'_2(z) & \psi_2(z_3)\dots\psi_2(z_n)\\
\dots & \dots & \dots\\
\psi_n(z_1) & \psi'_n(z_2)+\psi'_n(z) & \psi_n(z_3)\dots\psi_n(z_n)
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
\psi_1(z_2) & \psi_1(z) & \psi_1(z_3)\dots\psi_1(z_n)\\
\psi_2(z_2) & \psi_2(z) & \psi_2(z_3)\dots\psi_2(z_n)\\
\dots & \dots & \dots\\
\psi_n(z_2) & \psi_n(z) & \psi_n(z_3)\dots\psi_n(z_n)
\end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix}
\psi_1(z_2) & \psi'_1(z)+\psi'_1(z_1) & \psi_1(z_3)\dots\psi_1(z_n)\\
\psi_2(z_2) & \psi'_2(z)+\psi'_2(z_1) & \psi_2(z_3)\dots\psi_2(z_n)\\
\dots & \dots & \dots\\
\psi_n(z_2) & \psi'_n(z)+\psi'_n(z_1) & \psi_n(z_3)\dots\psi_n(z_n)
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
\psi_1(z) & \psi_1(z_1) & \psi_1(z_3)\dots\psi_1(z_n)\\
\psi_2(z) & \psi_2(z_1) & \psi_2(z_3)\dots\psi_2(z_n)\\
\dots & \dots & \dots\\
\psi_n(z) & \psi_n(z_1) & \psi_n(z_3)\dots\psi_n(z_n)
\end{vmatrix}
= 0
$$

über, und die Gleichung muss eine für alle Werthe von $z_1, z_2, \dots z_n$ identische sein, weil sie von der willkührlichen Constanten c frei ist, also mit der Gleichung (53) nicht zusammenfallen kann, andererseits aber ein gleichzeitiges Bestehen dieser beiden Gleichungen durch Elimination von z einen Zusammenhang zwischen $z_1, z_2, \dots z_n$ liefern würde, während diese Variabeln von einander unabhängig sein sollten. Betrachten wir in der Gleichung (58) die Grössen $z_1, z_2, \dots z_n$ als Parameter und sehen sie nur als eine Gleichung in der Variabeln z an, welche für alle Werthe von z identisch sein muss, so erkennt man unmittelbar, dass die Ableitungen der ψ-Functionen der Variabeln z nur in dem Ausdrucke vorkommen

$$
\text{(A)} \qquad \begin{vmatrix} \psi_1(z_1) & \psi'_1(z) & \psi_1(z_3) \dots \psi_1(z_n) \\ \psi_2(z_1) & \psi'_2(z) & \psi_2(z_3) \dots \psi_2(z_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_n(z_1) & \psi'_n(z) & \psi_n(z_3) \dots \psi_n(z_n) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \psi_1(z_2) & \psi_1(z) & \psi_1(z_3) \dots \psi_1(z_n) \\ \psi_2(z_2) & \psi_2(z) & \psi_2(z_3) \dots \psi_2(z_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_n(z_2) & \psi_n(z) & \psi_n(z_3) \dots \psi_n(z_n) \end{vmatrix}
$$

$$
- \begin{vmatrix} \psi_1(z_2) & \psi'_1(z) & \psi_1(z_3) \dots \psi_1(z_n) \\ \psi_2(z_2) & \psi'_2(z) & \psi_2(z_3) \dots \psi_2(z_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_n(z_2) & \psi'_n(z) & \psi_n(z_3) \dots \psi_n(z_n) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \psi_1(z_1) & \psi_1(z) & \psi_1(z_3) \dots \psi_1(z_n) \\ \psi_2(z_1) & \psi_2(z) & \psi_2(z_3) \dots \psi_2(z_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_n(z_1) & \psi_n(z) & \psi_n(z_3) \dots \psi_n(z_n) \end{vmatrix},
$$

während alle anderen Ausdrücke nur eine homogene lineare Function der Grössen $\psi_1(z), \psi_2(z), \dots \psi_n(z)$ liefern. Setzt man nun den ersten Posten von (A) in die Form

$$
[A_1\psi'_1(z) + A_2\psi'_2(z) + \dots + A_n\psi'_n(z)][B_1\psi_1(z) + B_2\psi_2(z) + \dots + B_n\psi_n(z)],
$$

so sieht man unmittelbar, dass, weil der zweite aus dem ersten durch Vertauschung von $\psi_\alpha(z)$ mit $\psi'_\alpha(z)$ hervorgeht, dieser die Gestalt annimmt

$$
[A_1\psi_1(z) + A_2\psi_2(z) + \dots + A_n\psi_n(z)][B_1\psi'_1(z) + B_2\psi'_2(z) + \dots + B_n\psi'_n(z)],
$$

und dass daher die Gleichung (58) auf die Form gebracht werden kann

$$
(59) \qquad \sum_{1}^{n}{}_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}[\psi_\lambda(z)\psi'_\mu(z) - \psi_\mu(z)\psi'_\lambda(z)] = T_1\psi_1(z) + T_2\psi_2(z) + \dots + T_n\psi_n(z),
$$

worin $\lambda\ \mu$ die $\frac{n(n-1)}{2}$ Combinationen verschiedener Indices von 1 bis n annehmen, und $a_{\lambda\mu}$ sowie $T_1, T_2, \dots T_n$ algebraische Functionen von $z_1, z_2, \dots z_n$ bedeuten, die als Parameter aufgefasst wurden. Da wir aber auch $\frac{n(n-1)}{2}$ solcher Integrabilitätsbedingungen (56) haben, so werden sich ebensoviele der Gleichung (59) analoge Gleichungen ergeben, und man wird aus diesen in den $\frac{n(n-1)}{2}$ Klammern der linken Seite linearen Gleichungen diese homogen linear in den rechten Seiten in der Form ausgedrückt erhalten

$$
(60) \qquad \psi_\lambda(z)\psi'_\mu(z) - \psi_\mu(z)\psi'_\lambda(z) = U_1^{(\lambda\mu)}\psi_1(z) + U_2^{(\lambda\mu)}\psi_2(z) + \dots + U_n^{(\lambda\mu)}\psi_n(z),
$$

worin die U-Grössen wiederum algebraisch von $z_1, z_2, \dots z_n$ abhängen. Wählen wir $\lambda = 1$, setzen ferner

$$\frac{\psi_\mu(z)}{\psi_1(z)} = v_\mu, \qquad \frac{dz}{\psi_1(z)} = dt, \tag{61}$$

so erhalten wir aus (60), wenn $\mu = 2, 3, \dots n$ gesetzt wird,

$$\left|\begin{aligned} \frac{dv_2}{dt} &= U_{12} + U_{22} v_2 + U_{32} v_3 + \cdots + U_{n2} v_n \\ \frac{dv_3}{dt} &= U_{13} + U_{23} v_2 + U_{33} v_3 + \cdots + U_{n3} v_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dv_n}{dt} &= U_{1n} + U_{2n} v_2 + U_{3n} v_3 + \cdots + U_{nn} v_n, \end{aligned}\right. \tag{62}$$

worin die U wieder sämmtlich als Constante in Bezug auf v_ρ und t zu betrachten sind. Bestimmt man nun $n - 1$ Constante $\alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ derart, dass

$$\begin{aligned} U_{12} + U_{22}\alpha_2 + U_{32}\alpha_3 + \cdots + U_{n2}\alpha_n &= 0 \\ U_{13} + U_{23}\alpha_2 + U_{33}\alpha_3 + \cdots + U_{n3}\alpha_n &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ U_{1n} + U_{2n}\alpha_2 + U_{3n}\alpha_3 + \cdots + U_{nn}\alpha_n &= 0 \end{aligned}$$

ist, so gehen mit Hülfe der Substitution

$$v_\rho = w_\rho + \alpha_\rho \tag{63}$$

die Differentialgleichungen (62) in

$$\left|\begin{aligned} \frac{dw_2}{dt} &= U_{22} w_2 + U_{32} w_3 + \cdots + U_{n2} w_n \\ \frac{dw_3}{dt} &= U_{23} w_2 + U_{33} w_3 + \cdots + U_{n3} w_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dw_n}{dt} &= U_{2n} w_2 + U_{3n} w_3 + \cdots + U_{nn} w_n \end{aligned}\right. \tag{64}$$

über, deren Integrale bekanntlich, wenn $\nu_2, \nu_3, \ldots \nu_n$ die Lösungen der Gleichung

$$(65) \qquad \begin{vmatrix} U_{22} - \nu & U_{32} & \ldots & U_{n2} \\ U_{23} & U_{33} - \nu & \ldots & U_{n3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ U_{2n} & U_{3n} & \ldots & U_{nn} - \nu \end{vmatrix} = 0$$

bezeichnen, und ein Constantensystem aus den Gleichungen bestimmt wird

$$(66) \qquad \begin{cases} (U_{22} - \nu_\rho) A_2^{(\rho)} + U_{32} A_3^{(\rho)} + \cdots + U_{n2} A_n^{(\rho)} = 0 \\ U_{23} A_2^{(\rho)} + (U_{33} - \nu_\rho) A_3^{(\rho)} + \cdots + U_{n3} A_n^{(\rho)} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{2n} A_2^{(\rho)} + U_{3n} A_3^{(\rho)} + \cdots + (U_{nn} - \nu_\rho) A_n^{(\rho)} = 0, \end{cases}$$

durch die Beziehungen dargestellt werden

$$(67) \qquad \begin{cases} w_2 = c_2 A_2^{(2)} e^{\nu_2 t} + c_3 A_2^{(3)} e^{\nu_3 t} + \cdots + c_n A_2^{(n)} e^{\nu_n t} \\ w_3 = c_2 A_3^{(2)} e^{\nu_2 t} + c_3 A_3^{(3)} e^{\nu_3 t} + \cdots + c_n A_3^{(n)} e^{\nu_n t} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_n = c_2 A_n^{(2)} e^{\nu_2 t} + c_3 A_n^{(3)} e^{\nu_3 t} + \cdots + c_n A_n^{(n)} e^{\nu_n t}. \end{cases}$$

Man erhält somit vermöge der Substitutionen (61) und (63) die nachfolgenden Beziehungen

$$(68) \qquad \begin{cases} \psi_2(z) = \alpha_2 \psi_1(z) + c_2 A_2^{(2)} \psi_1(z) e^{\nu_2 \int \frac{dz}{\psi_1(z)}} + \cdots + c_n A_2^{(n)} \psi_1(z) e^{\nu_n \int \frac{dz}{\psi_1(z)}} \\ \psi_3(z) = \alpha_3 \psi_1(z) + c_2 A_3^{(2)} \psi_1(z) e^{\nu_2 \int \frac{dz}{\psi_1(z)}} + \cdots + c_n A_3^{(n)} \psi_1(z) e^{\nu_n \int \frac{dz}{\psi_1(z)}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n(z) = \alpha_n \psi_1(z) + c_2 A_n^{(2)} \psi_1(z) e^{\nu_2 \int \frac{dz}{\psi_1(z)}} + \cdots + c_n A_n^{(n)} \psi_1(z) e^{\nu_n \int \frac{dz}{\psi_1(z)}}, \end{cases}$$

worin $\psi_1(z), \psi_2(z), \ldots \psi_n(z)$ algebraische Functionen von z sein müssen; wir durften die Grössen $\nu_2, \nu_3, \ldots \nu_n$ hier als verschieden betrachten — wären sie nicht verschieden, so würden zu den Exponentialfunctionen noch algebraische Functionen von t hinzutreten — weil die Coefficienten der

Gleichung (65) von den völlig willkührlichen Grössen $z_2, z_3, \ldots z_n$ abhängen, welche wir als Parameter betrachteten. Aus der Beziehung

$$(69) \qquad \frac{\psi_\lambda(z)}{\psi_1(z)} = a_\lambda + c_2 A_\lambda^{(2)} e^{\nu_2 \int \frac{dz}{\psi_1(z)}} + c_3 A_\lambda^{(3)} e^{\nu_3 \int \frac{dz}{\psi_1(z)}} + \cdots + c_n A_\lambda^{(n)} e^{\nu_n \int \frac{dz}{\psi_1(z)}}$$

folgt aber durch $(n-2)$-malige successive Differentiation nach z ein System von $n-1$ in den $n-1$ Grössen $e^{\nu_2 \int \frac{dz}{\psi_1(z)}}, \ldots e^{\nu_n \int \frac{dz}{\psi_1(z)}}$ linearen Gleichungen (1), aus denen sich

$$(70) \qquad e^{\nu_\rho \int \frac{dz}{\psi_1(z)}} = F_\rho(z)$$

ergiebt, worin $F_\rho(z)$ eine algebraische Function von z sein muss — und dass das lineare System auflösbar ist, geht daraus hervor, dass die Determinante nur für gleiche Werthe der ν-Grössen verschwinden würde; aus (70) folgt aber

$$F_\rho(z) = e^{\nu_\rho \int \frac{dz}{\psi_1(z)}} = \left(e^{\nu_2 \int \frac{dz}{\psi_1(z)}}\right)^{\frac{\nu_\rho}{\nu_2}} = F_2(z)^{\frac{\nu_\rho}{\nu_2}},$$

worin $\frac{\nu_\rho}{\nu_2}$ eine rationale Zahl sein muss, da der Ausdruck eine algebraische Function sein soll, und da $\psi_1(z)$ nach (70) für $\rho = 2$ durch den Ausdruck definirt ist

$$\psi_1(z) = \frac{\nu_2 F_2(z)}{F'_2(z)},$$

so folgt, wenn $F_2(z) = F(z)$ gesetzt wird, aus (69) das Gleichungssystem

$$(71) \qquad \left\{\begin{aligned} \psi_1(z) &= \frac{\nu_2 F(z)}{F'(z)} \\ \psi_2(z) &= \frac{a_2 \nu_2 F(z)}{F'(z)} + \frac{k_{22} \nu_2 F(z)^2}{F'(z)} + \frac{k_{32} \nu_2 F(z)^{\frac{\nu_3}{\nu_2}+1}}{F'(z)} + \cdots + \frac{k_{n2} \nu_2 F(z)^{\frac{\nu_n}{\nu_2}+1}}{F'(z)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n(z) &= \frac{a_n \nu_2 F(z)}{F'(z)} + \frac{k_{2n} \nu_2 F(z)^2}{F'(z)} + \frac{k_{3n} \nu_2 F(z)^{\frac{\nu_3}{\nu_2}+1}}{F'(z)} + \cdots + \frac{k_{nn} \nu_2 F(z)^{\frac{\nu_n}{\nu_2}+1}}{F'(z)}, \end{aligned}\right.$$

---

(1) Der Fall, in welchem $c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0$ ist, darf ausgeschlossen werden, weil dieser $\psi_2(z) = a_2\psi_1(z), \ldots \psi_n(z) = a_n\psi_1(z)$, also lineare homogene Relationen zwischen den ψ-Functionen liefern würde, was gegen die Annahme wäre.

worin die k Constanten bedeuten. Setzt man diese Werthe von $\psi_1(z)$, $\psi_2(z), \dots \psi_n(z)$ in die Differentialgleichung (51) und führt die abhängige Variable Z durch die Beziehung ein

$$F(z) = Z, \tag{72}$$

so geht die Differentialgleichung über in

$$\frac{dZ}{dx} = f_1(x) Z + f_2(x) Z^2 + f_3(x) Z^{\varepsilon_3} + \cdots + f_n(x) Z^{\varepsilon_n}, \tag{73}$$

worin $\varepsilon_3, \varepsilon_4, \dots \varepsilon_n$ rationale Zahlen bedeuten; setzt man endlich

$$\varepsilon_3 = \frac{\alpha_3}{\beta_3}, \qquad \varepsilon_4 = \frac{\alpha_4}{\beta_4}, \dots \varepsilon_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$$

und bezeichnet durch β das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $\beta_3, \beta_4, \dots \beta_n$, setzt ferner

$$\frac{\beta}{\beta_3} = \gamma_3, \qquad \frac{\beta}{\beta_4} = \gamma_4, \dots \frac{\beta}{\beta_n} = \gamma_n$$

und

$$Z = y^\beta, \tag{74}$$

so ergiebt sich die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = F_1(x) y^{\mu_1} + F_2(x) y^{\mu_2} + \cdots + F_n(x) y^{\mu_n}, \tag{75}$$

in welcher $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ ganze positive oder negative Zahlen bedeuten, und wir finden somit, da die Differentialgleichung (51) als eine vermöge der algebraischen, die unabhängige Variable x nicht enthaltenden Substitutionen (72) und (74) aus der Differentialgleichung (75) abgeleitete betrachtet werden kann, den folgenden Satz:

Sämmtliche Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine algebraische, von der unabhängigen Variabeln x freie Function von n particulären Integralen ist, die nicht schon selbst mit x und unter einander in algebraischer Beziehung stehen, haben die Form

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z) + \varphi_2(x)\psi_2(z) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z);$$

unter den hierin enthaltenen Differentialgleichungen werden unter der Voraussetzung, dass weder die Functionen $\varphi_1(x), \ldots \varphi_n(x)$ noch $\psi_1(z), \ldots \psi_n(z)$ unter einander in homogener linearer Relation mit constanten Coefficienten stehen, nur diejenigen jene Eigenschaft besitzen können, welche die Form haben

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x) z^{\mu_1} + \varphi_2(x) z^{\mu_2} + \cdots + \varphi_n(x) z^{\mu_n},$$

worin $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ ganze positive oder negative Zahlen bedeuten, oder diejenigen, welche aus dieser Form durch eine von der unabhängigen Variabeln freie algebraische Substitution für die abhängige Variable abgeleitet sind,

und es ist unmittelbar einzusehen, dass, wenn für eine solche Differentialgleichung die verlangte Eigenschaft statthat, dieselbe auch besteht für jede andere Differentialgleichung, die durch eine derartige Substitution aus der ersteren abgeleitet ist.

Untersuchen wir nun, welche Differentialgleichungen erster Ordnung von der Form

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x) z^{\mu_1} + \varphi_2(x) z^{\mu_2} + \cdots + \varphi_n(x) z^{\mu_n} \tag{76}$$

die verlangte Eigenschaft besitzen, oder, was nach den früheren Auseinandersetzungen dasselbe aussagt, für welche Werthe $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ die totale Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} dz & dz_1 & dz_2 & \ldots & dz_n \\ z^{\mu_1} & z_1^{\mu_1} & z_2^{\mu_1} & \ldots & z_n^{\mu_1} \\ z^{\mu_2} & z_1^{\mu_2} & z_2^{\mu_2} & \ldots & z_n^{\mu_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z^{\mu_n} & z_1^{\mu_n} & z_2^{\mu_n} & \ldots & z_n^{\mu_n} \end{vmatrix} = 0 \tag{77}$$

der oben aufgestellten Bedingung der algebraischen Integrabilität mit n von einander unabhängigen Variabeln genügt.

Machen wir in (77) die Substitutionen

$$z^{-\mu_1+1} = t, \quad z_1^{-\mu_1+1} = t_1, \ldots z_n^{-\mu_1+1} = t_n \text{ }(^1), \tag{78}$$

(¹) Ist $\mu_1 = 1$, so kann diese Substitution nicht angewandt werden; wir machen dann eine andere Horizontalreihe zur zweiten und setzen z. B.

$$z^{-\mu_2+1} = t, \quad z_1^{-\mu_2+1} = t_1, \ldots z_n^{-\mu_n+1} = t_n.$$

so geht die Determinante (77) in

$$\begin{vmatrix} \dfrac{z^{\mu_1}}{-\mu_1+1}\,dt & \dfrac{z_1^{\mu_1}}{-\mu_1+1}\,dt_1 & \dots & \dfrac{z_n^{\mu_1}}{-\mu_1+1}\,dt_n \\ z^{\mu_1} & z_1^{\mu_1} & \dots & z_n^{\mu_1} \\ z^{\mu_1}\, t^{\frac{\mu_2-\mu_1}{-\mu_1+1}} & z_1^{\mu_1}\, t_1^{\frac{\mu_2-\mu_1}{-\mu_1+1}} & \dots & z_n^{\mu_1}\, t_n^{\frac{\mu_2-\mu_1}{-\mu_1+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{\mu_1}\, t^{\frac{\mu_n-\mu_1}{-\mu_1+1}} & z_1^{\mu_1}\, t_1^{\frac{\mu_n-\mu_1}{-\mu_1+1}} & \dots & z_n^{\mu_1}\, t_n^{\frac{\mu_n-\mu_1}{-\mu_1+1}} \end{vmatrix} = 0$$

oder nach Weglassung der Factoren in

$$(79) \qquad \begin{vmatrix} dt & dt_1 & dt_2 & \dots & dt_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ t^{\frac{\mu_2-\mu_1}{-\mu_1+1}} & t_1^{\frac{\mu_2-\mu_1}{-\mu_1+1}} & & \dots & t_n^{\frac{\mu_2-\mu_1}{-\mu_1+1}} \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ t^{\frac{\mu_n-\mu_1}{-\mu_1+1}} & t_1^{\frac{\mu_n-\mu_1}{-\mu_1+1}} & & \dots & t_n^{\frac{\mu_n-\mu_1}{-\mu_1+1}} \end{vmatrix} = 0$$

über, und es wird auch für diese Gleichung der Voraussetzung gemäss und in Folge der algebraischen Substitutionen (78) ein Integral von der Form

$$(80) \qquad t = f_1(t_1,\, t_2,\, \dots t_n,\, c)$$

existiren müssen, worin f_1 eine algebraische Function und $t_1, t_2, \dots t_n$ von einander unabhängige Variable sein werden. Setzt man in (79) und (80) die unabhängige Variable $t_n = 0$ [1], so folgt, dass die totale Differentialgleichung

[1] Das Bedenken, dass, wenn $t_n = 0$ gesetzt wird, die Glieder der letzten Verticalreihe mit etwaigem negativen Exponenten unendlich würden, kann dadurch gehoben werden, dass man die Theile der rechten Seite der Differentialgleichung (76) so ordnet, dass, wenn sämmtliche μ unter der Einheit liegen, man für μ_1 die kleinste dieser Zahlen wählt — dann sind die Zähler und Nenner der t-Exponenten sämmtlich positiv —, wenn die μ alle grösser als die Einheit sind, dann für μ_1 die grösste dieser Zahlen nimmt — dann sind Zähler und Nenner sämmtlich negativ — und wenn endlich einige der μ-Grössen kleiner, einige grösser als die Einheit sind, so wähle man für μ_1 unter allen denjenigen

$$(81) \qquad \begin{vmatrix} dt & dt_1 & dt_2 & \dots & dt_{n-1} \\ t^{\frac{\mu_2-\mu_1}{-\mu_1+1}} & t_1^{\frac{\mu_2-\mu_1}{-\mu_1+1}} & t_2^{\frac{\mu_2-\mu_1}{-\mu_1+1}} & \dots & t_{n-1}^{\frac{\mu_2-\mu_1}{-\mu_1+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t^{\frac{\mu_n-\mu_1}{-\mu_1+1}} & t_1^{\frac{\mu_n-\mu_1}{-\mu_1+1}} & t_2^{\frac{\mu_n-\mu_1}{-\mu_1+1}} & \dots & t_{n-1}^{\frac{\mu_n-\mu_1}{-\mu_1+1}} \end{vmatrix} = 0$$

das Integral

$$(82) \qquad t = f_1(t_1, t_2, \dots t_{n-1}, 0, c)$$

besitzt, worin $t_1, t_2, \dots t_{n-1}$ von einander unabhängige Variable sind; setzt man hierin wieder, indem man zur Abkürzung

$$\frac{\mu_2 - \mu_1}{-\mu_1 + 1} = \nu_1, \qquad \frac{\mu_3 - \mu_1}{-\mu_1 + 1} = \nu_2, \dots \frac{\mu_n - \mu_1}{-\mu_1 + 1} = \nu_{n-1}$$

macht,

$$(83) \qquad t^{-\nu_1+1} = u, \qquad t_1^{-\nu_1+1} = u_1, \dots t_{n-1}^{-\nu_1+1} = u_{n-1},$$

so geht die Differentialgleichung wieder in

$$(84) \qquad \begin{vmatrix} du & du_1 & du_2 & \dots & du_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ u^{\frac{\nu_2-\nu_1}{-\nu_1+1}} & u_1^{\frac{\nu_2-\nu_1}{-\nu_1+1}} & u_2^{\frac{\nu_2-\nu_1}{-\nu_1+1}} & \dots & u_{n-1}^{\frac{\nu_2-\nu_1}{-\nu_1+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^{\frac{\nu_{n-1}-\nu_1}{-\nu_1+1}} & u_1^{\frac{\nu_{n-1}-\nu_1}{-\nu_1+1}} & u_2^{\frac{\nu_{n-1}-\nu_1}{-\nu_1+1}} & \dots & u_{n-1}^{\frac{\nu_{n-1}-\nu_1}{-\nu_1+1}} \end{vmatrix} = 0$$

über, und diese letztere hat ein algebraisches Integral

$$(85) \qquad u = f_2(u_1, u_2, \dots u_{n-1}, c),$$

worin $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$ unabhängige Variable bedeuten. Setzen wir auch

---

μ, welche unter der Einheit liegen, die kleinste, es werden dann Zähler und Nenner wieder positiv werden; der Fall, dass eine der μ-Grössen der Einheit gleich ist, ist offenbar nicht ausgeschlossen.

hier wieder genau wie oben $u_{n-1} = 0$, so erhalten wir die totale Differentialgleichung mit $n - 2$ unabhängigen Variabeln

$$(86) \qquad \begin{vmatrix} du & du_1 & du_2 & \dots & du_{n-1} \\ u^{\frac{\nu_2-\nu_1}{-\nu_1+1}} & u_1^{\frac{\nu_2-\nu_1}{-\nu_1+1}} & u_2^{\frac{\nu_2-\nu_1}{-\nu_1+1}} & \dots & u_{n-1}^{\frac{\nu_2-\nu_1}{-\nu_1+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^{\frac{\nu_{n-1}-\nu_1}{-\nu_1+1}} & u_1^{\frac{\nu_{n-1}-\nu_1}{-\nu_1+1}} & u_2^{\frac{\nu_{n-1}-\nu_1}{-\nu_1+1}} & \dots & u_{n-1}^{\frac{\nu_{n-1}-\nu_1}{-\nu_1+1}} \end{vmatrix} = 0,$$

welche ein Integral

$$(87) \qquad u = f_2(u_1, u_2, \dots u_{n-2}, 0, c)$$

mit $n - 2$ unabhängigen Variabeln besitzt. Schliesst man so weiter, so folgt, dass unter der Voraussetzung, dass die Differentialgleichung (77) der oben aufgestellten Bedingung der Integrabilität genügt, nothwendig auch die Differentialgleichung

$$(88) \qquad \begin{vmatrix} dv & dv_1 & dv_2 & dv_3 & dv_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ v^{\rho_1} & v_1^{\rho_1} & v_2^{\rho_1} & v_3^{\rho_1} & v_4^{\rho_1} \\ v^{\rho_2} & v_1^{\rho_2} & v_2^{\rho_2} & v_3^{\rho_2} & v_4^{\rho_2} \\ v^{\rho_3} & v_1^{\rho_3} & v_2^{\rho_3} & v_3^{\rho_3} & v_4^{\rho_3} \end{vmatrix} = 0$$

ein Integral von der Form

$$(89) \qquad v = \omega(v_1, v_2, v_3, v_4, c)$$

wird haben müssen, worin v_1, v_2, v_3, v_4 von einander unabhängige Variable bedeuten. Wir werden nun nachweisen, dass dies nie der Fall sein kann, und dass daher auch die ursprüngliche Annahme für die Differentialgleichung unstatthaft war, wenigstens so lange $n > 3$ ist([1]). Denn ange-

---

([1]) Ich untersuche die Integrabilitätsbedingung der Determinante (88) nicht unmittelbar, weil ich die bei der oben gewählten Methode für die Reduction des Problems sich ergebenden Resultate für die Integrabilitätsbedingungen von Determinanten von niederer Ordnung als der 5ten im Folgenden brauche.

nommen (89) wäre unter der gemachten Voraussetzung ein Integral der Differentialgleichung (88), so würde, wenn v_4 wiederum Null gesetzt würde, auch die Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} dv & dv_1 & dv_2 & dv_3 \\ v^{\rho_1} & v_1^{\rho_1} & v_2^{\rho_1} & v_3^{\rho_1} \\ v^{\rho_2} & v_1^{\rho_2} & v_2^{\rho_2} & v_3^{\rho_2} \\ v^{\rho_3} & v_1^{\rho_3} & v_2^{\rho_3} & v_3^{\rho_3} \end{vmatrix} = 0 \tag{90}$$

das Integral

$$v = \omega(v_1, v_2, v_3, 0, c) \tag{91}$$

mit 3 unabhängigen Variabeln besitzen und müsste somit der oben aufgestellten Bedingung der Integrabilität genügen. Dies letztere ist aber nur möglich, wenn ρ_1, ρ_2, ρ_3 bestimmten Bedingungen unterliegen; denn sei ρ_1 eine von der Einheit verschiedene Grösse, so würde die Substitution

$$v^{-\rho_1+1} = \xi, \quad v_1^{-\rho_1+1} = \xi_1, \quad v_2^{-\rho_1+1} = \xi_2, \quad v_3^{-\rho_1+1} = \xi_3 \tag{92}$$

die Differentialgleichung (90), genau wie oben, in die Gleichung

$$\begin{vmatrix} d\xi & d\xi_1 & d\xi_2 & d\xi_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \xi^{\sigma_1} & \xi_1^{\sigma_1} & \xi_2^{\sigma_1} & \xi_3^{\sigma_1} \\ \xi^{\sigma_2} & \xi_1^{\sigma_2} & \xi_2^{\sigma_2} & \xi_3^{\sigma_2} \end{vmatrix} = 0 \tag{93}$$

überführen, für welche

$$\xi = \Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3, c), \tag{94}$$

und ξ_1, ξ_2, ξ_3 von einander unabhängig wären, und wir untersuchen nunmehr direct die Bedingungen für die Integrabilität dieser Gleichung. Bildet man für dieselbe die Gleichung (56), so ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
(95)\quad & \{\xi_2^{\sigma_1}\xi_3^{\sigma_2} - \xi_3^{\sigma_1}\xi_2^{\sigma_2} - \xi_1^{\sigma_1}\xi_3^{\sigma_2} + \xi_3^{\sigma_1}\xi_1^{\sigma_2} + \xi_1^{\sigma_1}\xi_2^{\sigma_2} - \xi_2^{\sigma_1}\xi_1^{\sigma_2}\}\{\sigma_1\xi_1^{\sigma_1-1}\xi_3^{\sigma_2} - \sigma_2\xi_3^{\sigma_1}\xi_1^{\sigma_2-1} \\
& + \sigma_2\xi^{\sigma_1}\xi_1^{\sigma_2-1} - \sigma_1\xi^{\sigma_2}\xi_1^{\sigma_1-1} + \sigma_1\xi_2^{\sigma_1-1}\xi_3^{\sigma_2} - \sigma_2\xi_3^{\sigma_1}\xi_2^{\sigma_2-1} + \sigma_2\xi^{\sigma_1}\xi_2^{\sigma_2-1} - \sigma_1\xi_2^{\sigma_1-1}\xi^{\sigma_2}\} \\
& + \{\xi_2^{\sigma_1}\xi_3^{\sigma_2} - \xi_3^{\sigma_1}\xi_2^{\sigma_2} - \xi^{\sigma_1}\xi_3^{\sigma_2} + \xi_3^{\sigma_1}\xi^{\sigma_2} + \xi^{\sigma_1}\xi_2^{\sigma_2} - \xi_2^{\sigma_1}\xi^{\sigma_2}\}\{-\sigma_1\xi_2^{\sigma_1-1}\xi_3^{\sigma_2} + \sigma_2\xi_3^{\sigma_1}\xi_2^{\sigma_2-1} \\
& - \sigma_2\xi_1^{\sigma_1}\xi_2^{\sigma_2-1} + \sigma_1\xi_2^{\sigma_1-1}\xi_1^{\sigma_2} - \sigma_1\xi^{\sigma_1-1}\xi_3^{\sigma_2} + \sigma_2\xi_3^{\sigma_1}\xi^{\sigma_2-1} + \sigma_1\xi^{\sigma_1-1}\xi_1^{\sigma_2} - \sigma_2\xi^{\sigma_2-1}\xi_1^{\sigma_1}\} \\
& + \{\xi_1^{\sigma_1}\xi_3^{\sigma_2} - \xi_3^{\sigma_1}\xi_1^{\sigma_2} - \xi^{\sigma_1}\xi_3^{\sigma_2} + \xi_3^{\sigma_1}\xi^{\sigma_2} + \xi^{\sigma_1}\xi_1^{\sigma_2} - \xi_1^{\sigma_1}\xi^{\sigma_2}\}\{\sigma_1\xi^{\sigma_1-1}\xi_3^{\sigma_2} - \sigma_2\xi_3^{\sigma_1}\xi^{\sigma_2-1} \\
& - \sigma_1\xi^{\sigma_1-1}\xi_2^{\sigma_2} + \sigma_2\xi_2^{\sigma_1}\xi^{\sigma_2-1} + \sigma_1\xi_1^{\sigma_1-1}\xi_3^{\sigma_2} - \sigma_2\xi_1^{\sigma_2-1}\xi_3^{\sigma_1} - \sigma_1\xi_1^{\sigma_1-1}\xi_2^{\sigma_2} + \sigma_2\xi_2^{\sigma_1}\xi_1^{\sigma_2-1}\} = 0,
\end{aligned}
$$

welche Gleichung für alle Werthe der Grössen ξ, ξ_1, ξ_2, ξ_3 erfüllt sein müsste; nehmen wir $\sigma_2 > \sigma_1$ an, und suchen in dieser Gleichung das Glied mit der höchsten Potenz von ξ_3, so ist diese $\xi_3^{2\sigma_2}$ und ihr Coefficient, welcher wiederum identisch für alle Werthe von ξ, ξ_1, ξ_2 verschwinden müsste:

$$
\sigma_1\{\xi_2^{\sigma_1}\xi_1^{\sigma_1-1} - \xi_1^{\sigma_1}\xi_2^{\sigma_1-1} - \xi_2^{\sigma_1}\xi^{\sigma_1-1} + \xi^{\sigma_1}\xi_2^{\sigma_1-1} + \xi^{\sigma_1-1}\xi_1^{\sigma_1} - \xi^{\sigma_1}\xi_1^{\sigma_1-1}\},
$$

und man sieht sogleich, dass dies nur dann möglich ist, *wenn* $\sigma_1 = 1$ *ist;* suchen wir weiter in der obigen Gleichung (95), jetzt unter der Voraussetzung $\sigma_1 = 1$, den Coefficienten von $\xi_3^{\sigma_2+\sigma_1} = \xi_3^{\sigma_2+1}$, so wird dieser

$$
\sigma_2\{\xi_1\xi_2^{\sigma_2-1} - \xi_2\xi_1^{\sigma_2-1} + \xi_2\xi^{\sigma_2-1} - \xi\xi_2^{\sigma_2-1} + \xi\xi_1^{\sigma_2-1} - \xi_1\xi^{\sigma_2-1}\},
$$

und es ist hier wieder unmittelbar zu sehen, dass dieser nur dann identisch verschwindet, *wenn* $\sigma_2 = 2$ *ist;* wir erhalten somit den Satz, *dass unter allen in der Determinantengleichung*

$$
\begin{vmatrix}
d\xi & d\xi_1 & d\xi_2 & d\xi_3 \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
\xi^{\sigma_1} & \xi_1^{\sigma_1} & \xi_2^{\sigma_1} & \xi_3^{\sigma_1} \\
\xi^{\sigma_2} & \xi_1^{\sigma_2} & \xi_2^{\sigma_2} & \xi_3^{\sigma_2}
\end{vmatrix} = 0,
$$

in welcher σ_1 *und* σ_2 *rationale Zahlen bedeuten, enthaltenen Differentialgleichungen nur*

$$(96)\qquad \begin{vmatrix} d\xi & d\xi_1 & d\xi_2 & d\xi_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \xi & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi^2 & \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

der Bedingung der Integrabilität für drei unabhängige Variable ξ_1, ξ_2, ξ_3 *genügt* (¹).

Da nun also, wie aus der Substitution (92) mit Rücksicht auf die Form (79) hervorgeht, die Determinantengleichung (90) dann und nur dann der Bedingung der Integrabilität genügt, wenn

$$\sigma_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{-\rho_1 + 1} = 1, \qquad \sigma_2 = \frac{\rho_3 - \rho_1}{-\rho_1 + 1} = 2$$

also

$$(a)\qquad \rho_1 = \rho_1, \qquad \rho_2 = 1, \qquad \rho_3 = -\rho_1 + 2$$

ist, so folgt, dass die Determinante (88) nur dann der Bedingung der Integrabilität genügen könnte, wenn sie die Form hat

$$(97)\qquad \begin{vmatrix} dv & dv_1 & dv_2 & dv_3 & dv_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ v & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v^{\rho_1} & v_1^{\rho_1} & v_2^{\rho_1} & v_3^{\rho_1} & v_4^{\rho_1} \\ v^{-\rho_1+2} & v_1^{-\rho_1+2} & v_2^{-\rho_1+2} & v_3^{-\rho_1+2} & v_4^{-\rho_1+2} \end{vmatrix} = 0,$$

(¹) Dass die Determinantengleichung (96) auch wirklich der Integrabilitätsbedingung genügt, ist unmittelbar ersichtlich, da die Gleichung (56) in diesem Falle in

$$\begin{aligned}(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)(\xi_3 - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi) \\ + (\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_3)(\xi + \xi_2 - \xi_1 - \xi_3) \\ + (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)(\xi_3 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_1 + \xi - \xi_2 - \xi_3) = 0\end{aligned}$$

oder

$$(\xi_2 - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi) + (\xi - \xi_2)(\xi + \xi_2 - \xi_1 - \xi_3) + (\xi_1 - \xi)(\xi_1 + \xi - \xi_2 - \xi_3) = 0$$

übergeht, welche für alle Werthe von ξ, ξ_1, ξ_2, ξ_3 erfüllt ist.

und es soll endlich gezeigt werden, dass diese für kein rationales ρ_1 der Integrabilitätsbedingung für 4 unabhängige Variable v_1, v_2, v_3, v_4 genügen kann. Um dies nachzuweisen, könnte man mit Benutzung der Gleichung (58) zeigen, dass die Beziehung

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ v & 2 & v_3 & v_4 \\ v^{\rho_1} & \rho_1\left(v_1^{\rho_1-1}+v_2^{\rho_1-1}\right) & v_3^{\rho_1} & v_4^{\rho_1} \\ v^{-\rho_1+2} & (-\rho_1+2)\left(v_1^{-\rho_1+1}+v_2^{-\rho_1+1}\right) & v_3^{-\rho_1+2} & v_4^{-\rho_1+2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1^{\rho_1} & v_2^{\rho_1} & v_3^{\rho_1} & v_4^{\rho_1} \\ v_1^{-\rho_1+2} & v_2^{-\rho_1+2} & v_3^{-\rho_1+2} & v_4^{-\rho_1+2} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_1 & 2 & v_3 & v_4 \\ v_1^{\rho_1} & \rho_1\left(v_2^{\rho_1-1}+v^{\rho_1-1}\right) & v_3^{\rho_1} & v_4^{\rho_1} \\ v_1^{-\rho_1+2} & (-\rho_1+2)\left(v_2^{-\rho_1+1}+v^{-\rho_1+1}\right) & v_3^{-\rho_1+2} & v_4^{-\rho_1+2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & v & v_3 & v_4 \\ v_2^{\rho_1} & v^{\rho_1} & v_3^{\rho_1} & v_4^{\rho_1} \\ v_2^{-\rho_1+2} & v^{-\rho_1+2} & v_3^{-\rho_1+2} & v_4^{-\rho_1+2} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_2 & 2 & v_3 & v_4 \\ v_2^{\rho_1} & \rho_1\left(v^{\rho_1-1}+v_1^{\rho_1-1}\right) & v_3^{\rho_1} & v_4^{\rho_1} \\ v_2^{-\rho_1+2} & (-\rho_1+2)\left(v^{-\rho_1+1}+v_1^{-\rho_1+1}\right) & v_3^{-\rho_1+2} & v_4^{-\rho_1+2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ v & v_1 & v_3 & v_4 \\ v^{\rho_1} & v_1^{\rho_1} & v_3^{\rho_1} & v_4^{\rho_1} \\ v^{-\rho_1+2} & v_1^{-\rho_1+2} & v_3^{-\rho_1+2} & v_4^{-\rho_1+2} \end{vmatrix} = 0$$

nicht für alle Werthe von v, v_1, v_2, v_3, v_4 identisch erfüllt werden kann, doch würde dies eine etwas umständliche Rechnung erfordern, und wir wählen daher eine wesentlich davon verschiedene Betrachtung, die unmittelbar zu dem gesuchten Resultate führt. Durch Vergleichung von (97) mit (52) ergiebt sich, wenn die Variablen v durch z ersetzt werden,

$$\psi_1(z) = 1 \qquad \psi_2(z) = z \qquad \psi_3(z) = z^{\rho_1} \qquad \psi_4(z) = z^{-\rho_1+2}$$

also

$$\psi'_1(z) = 0 \qquad \psi'_2(z) = 1 \qquad \psi'_3(z) = \rho_1 z^{\rho_1-1} \qquad \psi'_4(z) = (-\rho_1+2)z^{-\rho_1+1},$$

und es wird nach (60), worin die U-Grössen von z unabhängig sind, in unserem Falle

$$(98) \qquad \psi_\lambda(z)\psi'_\mu(z) - \psi_\mu(z)\psi'_\lambda(z) = U_1^{(\lambda\mu)} + U_2^{(\lambda\mu)} z + U_3^{(\lambda\mu)} z^{\rho_1} + U_4^{(\lambda\mu)} z^{-\rho_1+2}$$

sein, welches auch die ungleiche Combination $\lambda\mu$ aus den Indices 1 2 3 4 sein mag; setzt man aber $\lambda = 1$ und $\mu = 3$, so ist

$$\psi_1(z)\psi'_3(z) - \psi_3(z)\psi'_1(z) = \rho_1 z^{\rho_1 - 1},$$

und es muss somit vermöge der Gleichung (98) $\rho_1 - 1 = 0$ oder 1 oder ρ_1 oder $-\rho_1 + 2$ sein; da aber für $\rho_1 = 1$ zwei Horizontalreihen von (97) zusammenfallen, für $\rho_1 = 2$ die letzte Horizontalreihe wieder nur wie die zweite aus Einheiten bestehen würde, so muss $\rho_1 - 1 = -\rho_1 + 2$ d. h. $\rho_1 = \frac{3}{2}$ sein, und nur in diesem Falle würde der nothwendigen Bedingung (98) genügt sein; setzen wir aber $\lambda = 1$ und $\mu = 4$, so folgt

$$\psi_1(z)\psi'_4(z) - \psi_4(z)\psi'_1(z) = (-\rho_1 + 2) z^{-\rho_1 + 1},$$

und es müsste somit $-\rho_1 + 1 = 0$ oder 1 oder ρ_1 oder $-\rho_1 + 2$ sein, was zur Folge hat, dass, weil $\rho_1 = 1$ und $\rho_1 = 0$ wieder zwei Horizontalreihen zusammenfallen liessen, $\rho_1 = \frac{1}{2}$ sein muss — da sich also die beiden Bedingungen $\rho_1 = \frac{3}{2}$ und $\rho_1 = \frac{1}{2}$ widersprechen, so folgt, dass die Gleichung (98) nicht allgemein besteht, die Differentialgleichung (97) somit für keinen Werth von ρ_1 der Integrabilitätsbedingung Genüge leistet. Da dies aber nothwendig war, wenn die vorgelegte Differentialgleichung (77) mit n unabhängigen Variabeln integrirbar sein sollte, so folgt, dass diese ebenfalls nie der Bedingung der Integrabilität Genüge leistet, so lange $n > 3$ ist; ist jedoch $n = 3$, so ergab zugleich die für die Determinante (90) durchgeführte Untersuchung, dass nach den Bestimmungen (a) nur die Determinante

$$\begin{vmatrix} dv & dv_1 & dv_2 & dv_3 \\ v & v_1 & v_2 & v_3 \\ v^{\rho_1} & v_1^{\rho_1} & v_2^{\rho_1} & v_3^{\rho_1} \\ v^{-\rho_1+2} & v_1^{-\rho_1+2} & v_2^{-\rho_1+2} & v_3^{-\rho_1+2} \end{vmatrix} = 0$$

die verlangte Eigenschaft hat und zwar für jedes rationale ρ_1 (da wir nur algebraische Functionen in Betracht ziehen) oder die durch die algebraischen Substitutionen (92) daraus hergeleitete (96).

Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Unter allen totalen Differentialgleichungen der Form

$$\begin{vmatrix} dz & dz_1 & dz_2 & \dots & dz_n \\ z^{\mu_1} & z_1^{\mu_1} & z_2^{\mu_1} & \dots & z_n^{\mu_1} \\ z^{\mu_2} & z_1^{\mu_2} & z_2^{\mu_2} & \dots & z_n^{\mu_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{\mu_n} & z_1^{\mu_n} & z_2^{\mu_n} & \dots & z_n^{\mu_n} \end{vmatrix} = 0$$

hat nur die durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} dz & dz_1 & dz_2 & dz_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ z^2 & z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

repraesentirte die Eigenschaft, dass eine Variable derselben sich als Function der anderen Variabeln und einer willkührlichen Constanten ausdrücken lässt und zwar so dass diese letzteren Variabeln von einander unabhängig sind.

Im Zusammenhange mit der oben geführten Untersuchung, welche die Frage nach der Abhängigkeit des allgemeinen von den particulären Integralen einer Differentialgleichung erster Ordnung auf die Untersuchung der Integrabilität einer Pfaff'schen Gleichung zurückführte, wird sich somit das folgende Theorem ergeben:

Sämmtliche Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine algebraische, von der unabhängigen Variabeln x freie Function von n particulären Integralen ist, die nicht schon selbst mit x und unter einander in algebraischer Beziehung stehen, haben die Form

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z) + \varphi_2(x)\psi_2(z) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z); \tag{99}$$

unter den hierin enthaltenen Differentialgleichungen haben unter der Voraussetzung, dass weder die Functionen $\varphi_1(x), \dots \varphi_n(x)$, noch $\psi_1(z), \dots \psi_n(z)$ unter

einander in homogener linearer Relation mit constanten Coefficienten stehen, nur die Differentialgleichungen

(100) $$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)z + \varphi_3(x)z^2$$

und die aus dieser durch eine willkührliche, von der Variabeln x freie algebraische Function, welche z mit der neuen abhängigen Variabeln verbindet, abgeleiteten Gleichungen und zwar alle diese die verlangte Eigenschaft; für alle anderen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche in der Form (99) *enthalten sind, werden also die unendlich vielen particulären Integrale auch selbständige, wenigstens nicht durch von x freie algebraische Beziehungen unter einander im Zusammenhang stehende Transcendente sein, während die Differentialgleichungen* (100) *höchstens* 3 *selbständige Transcendenten definiren.*

Nachdem wir aber die Untersuchung für den Fall durchgeführt, dass in der Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z) + \varphi_2(x)\psi_2(z) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z)$$

weder die φ-Functionen noch die ψ-Functionen unter einander in homogener linearer Beziehung mit constanten Coefficienten stehen, gehen wir zu dem allgemeinen Falle über, in welchem für die vorausgesetzte Beziehung

(101) $$z = f(z_1, z_2, \ldots z_n, c)$$

die Differentialgleichung die Form hat

(102) $$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z) + \varphi_2(x)\psi_2(z) + \cdots + \varphi_{n-\rho}(x)\psi_{n-\rho}(z),$$

in welcher die Functionen φ und ψ nunmehr linear irreductible Functionen sind; für diesen Fall wurde oben nachgewiesen, dass die Beziehung (101) für das System der $\rho + 1$ totalen Differentialgleichungen von n Variabeln

(103) $$\begin{vmatrix} dz & dz_1 & \ldots & dz_{n-\rho} \\ \psi_1(z) & \psi_1(z_1) & \ldots & \psi_1(z_{n-\rho}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{n-\rho}(z) & \psi_{n-\rho}(z_1) & \ldots & \psi_{n-\rho}(z_{n-\rho}) \end{vmatrix} = 0, \ldots \begin{vmatrix} dz & dz_1 & \ldots & dz_n \\ \psi_1(z) & \psi_1(z_1) & \ldots & \psi_1(z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{n-\rho}(z) & \psi_{n-\rho}(z_1) & \ldots & \psi_{n-\rho}(z_n) \end{vmatrix} = 0$$

ein mit einer willkührlichen Constanten behaftetes Integral von $n - \rho$ unabhängigen Variabeln darstellt, für welche wir die Werthe

$$z_1, z_2, \ldots z_{n-\rho-1}, z_{n-\rho}$$

wählen wollen, während $z_{n-\rho+1}, z_{n-\rho+2}, \ldots z_n$ als Functionen dieser ersteren zu betrachten sind. Da nun das Integral (101) dann die Form annimmt

$$z = F(z_1, z_2, \ldots z_{n-\rho}, c), \tag{104}$$

so wird die erste der Determinanten (103)

$$\begin{vmatrix} dz & dz_1 & \ldots & dz_{n-\rho-1} & dz_{n-\rho} \\ \psi_1(z) & \psi_1(z_1) & \ldots & \psi_1(z_{n-\rho-1}) & \psi_1(z_{n-\rho}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{n-\rho}(z) & \psi_{n-\rho}(z_1) & \ldots & \psi_{n-\rho}(z_{n-\rho-1}) & \psi_{n-\rho}(z_{n-\rho}) \end{vmatrix} = 0 \tag{105}$$

ein mit einer willkührlichen Constanten c versehenes Integral (104) mit einer Anzahl unabhängiger Variabeln besitzen, welche um die Einheit kleiner ist als die Anzahl der Variabeln der Differentialgleichung (105) überhaupt; dies war aber grade der oben durchgeführte Fall der Differentialgleichung (52), und es war dort gezeigt, dass dann und nur dann die Bedingung der Integrabilität erfüllt sein kann, wenn die ψ-Functionen die durch die Gleichungen (71) geforderte Form besitzen, dass daher die Differentialgleichung (102) ähnlich wie (76) die Form haben muss

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x) z^{\mu_1} + \varphi_2(x) z^{\mu_2} + \cdots + \varphi_{n-\rho}(x) z^{\mu_{n-\rho}}, \tag{106}$$

und dass somit nur die Determinante

$$\begin{vmatrix} dz & dz_1 & dz_2 & \ldots & dz_{n-\rho} \\ z^{\mu_1} & z_1^{\mu_1} & z_2^{\mu_1} & \ldots & z_{n-\rho}^{\mu_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z^{\mu_{n-\rho}} & z_1^{\mu_{n-\rho}} & z_2^{\mu_{n-\rho}} & \ldots & z_{n-\rho}^{\mu_{n-\rho}} \end{vmatrix} = 0 \tag{107}$$

ein Integral mit $n-\rho$ von einander unabhängigen Variabeln besitzen könnte; dies ist aber der vorher angestellten Untersuchung zufolge dann und nur dann der Fall, wenn die Determinante die Form hat

$$\begin{vmatrix} dz & dz_1 & dz_2 & dz_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ z^2 & z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{108}$$

oder eine solche, welche erhalten wird, wenn $z = Z^k$ gesetzt wird, worin k eine rationale Zahl bedeutet; es muss somit wieder $n-\rho = 3$ sein, und die Differentialgleichung jedenfalls wieder — von algebraischen Substitutionen für die abhängige Variable abgesehen — die Form haben

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)z + \varphi_3(x)z^2,$$

die bereits oben behandelt ist.

Wir erhalten somit jetzt den folgenden allgemeinen Satz:

Unter allen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$F\left(x,\ z,\ \frac{dz}{dx}\right) = 0 \tag{109}$$

haben nur die in der Form

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)z + \varphi_3(x)z^2 \tag{110}$$

enthaltenen und die durch algebraische Substitution aus diesen abgeleiteten die Eigenschaft, dass sich ihr allgemeines Integral als eine algebraische Function einer bestimmten Anzahl particulärer Integrale ausdrücken lässt, und zwar gilt für alle Differentialgleichungen (110) *die Beziehung*

$$z = \frac{c_3 z_1(z_2 - z_3) + c z_2(z_3 - z_1)}{c_3(z_2 - z_3) + c(z_3 - z_1)},$$

oder, wie leicht aus den obigen Formeln zu entnehmen, in symmetrischer Form

$$\begin{vmatrix} z & cz & 1 & c \\ z_1 & c_1 z_1 & 1 & c_1 \\ z_2 & c_2 z_2 & 1 & c_2 \\ z_3 & c_3 z_3 & 1 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

oder anders ausgedrückt:

Für jede Differentialgleichung erster Ordnung bilden die particulären Integrale unendlich viele selbständige, nicht durch algebraische Beziehungen auf einander zurückführbare Functionen; die Differentialgleichungen (110) *und die durch algebraische Substitution aus diesen abgeleiteten allein haben die Eigenschaft nur drei, in dem angegebenen Sinne, wesentlich verschiedene Functionen zu definiren.*

MÉMOIRE

SUR

LES GROUPES KLEINÉENS

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

§ 1. *Substitutions imaginaires.*

Dans un mémoire antérieur, j'ai étudié les groupes discontinus formés par les substitutions linéaires à coëfficients réels. Dans le présent travail, j'ai l'intention d'exposer quelques résultats relatifs aux groupes de substitutions linéaires à coëfficients imaginaires. Ces substitutions se classent naturellement en quatre catégories, comme on va le voir.

Soit:

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

une substitution quelconque, où je suppose toujours:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Si on a:

$$(\alpha + \delta)^2 = 4$$

la substitution peut se mettre sous la forme:

$$\left(\frac{1}{z - a}, \quad \frac{1}{z - a} + K\right)$$

a et K étant des constantes. On dit alors qu'elle est *parabolique*.

Si on a:

$$(\alpha + \delta)^2 \lesseqgtr 4$$

la substitution peut se mettre sous la forme:

$$\left(\frac{z-a}{z-b}, \quad K\frac{z-a}{z-b}\right)$$

a, b, K étant des constantes.

Si

$$(\alpha + \delta)^2 \text{ réel positif et } > 4$$

K est réel positif et la substitution est *hyperbolique.*

Si

$$(\alpha + \delta)^2 \text{ réel positif et } < 4$$

K est imaginaire ou négatif et a pour module 1, la substitution est *elliptique.*

Si enfin $(\alpha + \delta)^2$ est imaginaire ou négatif, K est également imaginaire ou négatif et la substitution est *loxodromique.*

Une propriété commune à toutes ces substitutions linéaires c'est de transformer les cercles en cercles. Représentons en effet, à l'exemple de M. Hermite, les quantités imaginaires conjuguées de u, v, ... par la notation u_0, v_0, ...

La substitution

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) \tag{1}$$

peut s'écrire:

$$\left(z_0, \frac{\alpha_0 z_0 + \beta_0}{\gamma_0 z_0 + \delta_0}\right).$$

L'équation générale d'un cercle s'écrit d'ailleurs

$$Azz_0 + Bz + B_0 z_0 + C = 0 \tag{2}$$

A et C étant essentiellement réels, et il est clair qu'on retombera sur ce cercle (2) en appliquant la substitution (1) au cercle dont voici l'équation:

$$A(\alpha z + \beta)(\alpha_0 z_0 + \beta_0) + B(\alpha z + \beta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0)$$
$$+ B_0(\gamma z + \delta)(\alpha_0 z_0 + \beta_0) + C(\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0) = 0$$

ou bien:

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
& zz_0(A\alpha\alpha_0 + B\alpha\gamma_0 + B_0\gamma\alpha_0 + C\gamma\gamma_0) \\
& + z(A\alpha\beta_0 + B\alpha\delta_0 + B_0\gamma\beta_0 + C\gamma\delta_0) \\
& + z_0(A\beta\alpha_0 + B\beta\gamma_0 + B_0\delta\beta_0 + C\delta\delta_0) \\
& + (A\beta\beta_0 + B\beta\delta_0 + B_0\delta\beta_0 + C\delta\delta_0) = 0.
\end{aligned}
$$

Ecrivons maintenant l'équation d'une inversion par rapport au cercle (2), c'est à dire de l'opération qui consiste à changer un point quelconque z en son transformé par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôle de la transformation le centre du cercle (2) et pour paramètre de la transformation le carré du rayon de ce cercle. Voici cette équation.

Soit t le transformé de z par cette inversion, on aura:

$$t + \frac{B_0}{2A} = \frac{\sqrt{4AC - BB_0}}{2Az_0 + B}.$$

Soient C_1 et C_2 deux cercles quelconques, et appelons I_1 et I_2 les inversions opérées respectivement par rapport à ces deux cercles. Si nous faisons subir à un point quelconque l'inversion I_1 puis l'inversion I_2, l'opération résultante que l'on pourra représenter par la notation $I_1 I_2$, sera une substitution linéaire comme il est aisé de s'en assurer. Cette substitution sera parabolique si les deux cercles C_1 et C_2 se touchent, elliptique s'ils se coupent et hyperbolique s'ils ne se coupent pas.

Supposons qu'on étudie la résultante non plus de deux, mais de plusieurs inversions successives. Si ces inversions sont en nombre pair, la résultante sera une substitution linéaire; si elles sont en nombre impair, la résultante sera une opération plus complexe qui pourra être regardée comme une substitution linéaire suivie d'une inversion. De plus *toute substitution linéaire peut être regardée d'une infinité de manières comme la résultante d'un nombre pair d'inversions.*

Le groupe obtenu en combinant de diverses manières les différentes inversions imaginables contient donc toutes les substitutions linéaires.

Posons:

$$z = \xi + \eta\sqrt{-1}$$

ξ et η seront les coordonnées d'un point représentatif de z dans son plan.

Considérons maintenant un point quelconque, non plus dans le plan $\xi\eta$, mais dans l'espace et soient ξ, η, ζ ses coordonnées; je supposerai ζ positif de telle façon que le point considéré soit au dessus du plan des $\xi\eta$. On a vu que la substitution (1) change un point quelconque ξ, η du plan des $\xi\eta$ en un autre point de ce même plan. Nous allons étendre la définition de la substitution (1) de façon à ce qu'on puisse appliquer cette substitution, non seulement à un point du plan $\xi\eta$, mais à un point quelconque de l'espace. La substitution (1), nous l'avons vu, peut être regardée comme la résultante d'un certain nombre d'inversions faites successivement par rapport à certains cercles du plan des $\xi\eta$ que j'appelle C_1, C_2, ... C_n. Soient Σ_1, Σ_2, ... Σ_n les sphères qui ont même centre et même rayon que ces cercles. Considérons l'opération qui consiste à effectuer n inversions successivement par rapport aux sphères Σ_1, Σ_2, ... Σ_n. Cette opération, si on l'applique à un point du plan des $\xi\eta$ ne diffère pas de la substitution (1). On pourra donc définir encore ainsi la substitution (1) quand il s'agira de l'appliquer à un point de l'espace situé en dehors du plan des $\xi\eta$.

Une inversion par rapport à l'une des sphères Σ_1, Σ_2, ... Σ_n transforme les sphères en sphères; elle transforme en lui-même le plan des $\xi\eta$; elle conserve les angles; elle transforme toute figure infiniment petite en une figure infiniment petite semblable; toutes ces propriétés appartiennent donc à leur résultante, c'est à dire à la substitution (1) généralisée.

Supposons que l'inversion par rapport au cercle C_1 par exemple, change un certain cercle K du plan des $\xi\eta$ en un autre cercle K_1 de ce même plan. Soient S et S_1 les sphères qui ont même centre et même rayon que K et K_1; il est clair que l'inversion par rapport à la sphère Σ_1 changera S en S_1. Si donc la substitution (1) change le cercle K en un certain cercle K_n, et si S et S_n sont les sphères qui ont même rayon que K et K_n, la substitution (1) généralisée changera S en S_n. En effet la substitution (1) équivaut à n inversions opérées respectivement par rapport aux cercles C_1, C_2, ... C_n; ces inversions changent successivement le cercle K en K_1 puis en K_2, ... puis enfin en K_n. Soit S_i la sphère qui a même rayon et même centre que K_i. La substitution (1) généralisée équivaudra à n inversions opérées respectivement par rapport aux sphères Σ_1, Σ_2, ... Σ_n et ces inversions changeront successivement la sphère S en S_1, puis en S_2, ... puis enfin en S_n. C. Q. F. D.

Pour justifier la définition précédente, il faut établir ce qui suit:

La substitution (1) peut être regardée *d'une infinité de manières* comme la résultante d'un nombre pair d'inversions opérées par rapport à divers cercles du plan des $\xi\eta$. Les cercles $C_1, C_2, \ldots C_n$ ne sont donc pas parfaitement déterminés. Il faut faire voir que la substitution (1) généralisée est cependant une opération parfaitement déterminée. Supposons en effet que la substitution (1) puisse être regardée:

1° d'une part comme la résultante de n inversions opérées par rapport aux cercles $C_1, C_2, \ldots C_n$

2° d'autre part comme la résultante de p inversions opérées par rapport à p autres cercles $C''_1, C''_2, \ldots C''_p$.

Soit Σ''_i la sphère qui a même centre et même rayon que C''_i.

Soit maintenant un point P quelconque de l'espace; appliquons lui successivement les inversions par rapport aux sphères $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_n$; nous obtiendrons un certain point Q. Appliquons maintenant au point P successivement les inversions par rapport aux sphères $\Sigma''_1, \Sigma''_2, \ldots \Sigma''_p$, nous obtiendrons un certain point Q'. Appelons ces deux opérations (P, Q), (P, Q'); elles satisfont toutes deux à la définition de la substitution (1) généralisée, il faut donc démontrer que les deux points Q et Q' coïncident. Eh bien, nous pouvons faire passer par le point P trois sphères S, S', S'', ayant leurs centres dans le plan des $\xi\eta$ et coupant ce plan suivant trois grands cercles K, K' et K''.

La substitution (1) changera ces trois grands cercles en trois autres cercles K_1, K'_1 et K''_1 du plan des $\xi\eta$. Soient S_1, S'_1 et S''_1 les sphères qui ont même centre et même rayon que ces cercles; l'opération (P, Q) de même que l'opération (P, Q') change S, S' et S'' en S_1, S'_1 et S''_1. Le point Q, de même que le point Q' se trouve donc à l'intersection des trois sphères S_1, S'_1 et S''_1. Donc ces deux points coïncident. Donc la substitution (1) généralisée est une opération parfaitement déterminée.

C. Q. F. D.

Il reste à trouver les équations de cette opération. Pour définir un point P de l'espace, nous emploierons les trois coordonnées suivantes:

$$z = \xi + i\eta \qquad z_0 = \xi - i\eta \qquad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = zz_0 + \zeta^2;$$

ζ étant supposé positif, ces trois coordonnées suffisent pour définir complètement le point P.

Soient ρ'^2, z' et z'_0 les trois coordonnées du point Q transformé de P par la substitution (1) généralisée. Exprimons que le point P se trouve sur la sphère qui a même centre et même rayon que le cercle (3); j'ai à écrire:

$$\begin{aligned}
(4) \qquad & \rho^2(A\alpha\alpha_0 + B\alpha\gamma_0 + B_0\gamma\alpha_0 + C\gamma\gamma_0) \\
& + z(A\alpha\beta_0 + B\alpha\delta_0 + B_0\gamma\beta_0 + C\gamma\delta_0) \\
& + z_0(A\beta\alpha_0 + B\beta\gamma_0 + B_0\delta\alpha_0 + C\delta\gamma_0) \\
& + (A\beta\beta_0 + B\beta\delta_0 + B_0\delta\beta_0 + C\delta\delta_0) = 0.
\end{aligned}$$

Si le point P est sur la sphère qui a même centre et même rayon que le cercle (3), le point Q devra se trouver sur la sphère qui a même centre et même rayon que le cercle (2) transformé de (3) par la substitution (1), d'où l'équation:

$$(5) \qquad A\rho'^2 + Bz' + B_0 z'_0 + C = 0.$$

Ces deux équations, si on y regarde A, B, B_0 et C comme les inconnues doivent être équivalentes. On a donc:

$$\rho'^2 = \frac{\rho^2\alpha\alpha_0 + z\alpha\beta_0 + z_0\beta\alpha_0 + \beta\beta_0}{\rho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0}$$

$$z' = \frac{\rho^2\alpha\gamma_0 + z\alpha\delta_0 + z_0\beta\gamma_0 + \beta\delta_0}{\rho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0}$$

$$z'_0 = \frac{\rho^2\gamma\alpha_0 + z\gamma\beta_0 + z_0\delta\alpha_0 + \delta\beta_0}{\rho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0}.$$

Telles sont les équations de la substitution (1) généralisée.

Passons aux propriétés générales de cette substitution.

Si la substitution (1) est elliptique, elle change en eux-mêmes tous les points du cercle C qui passe par les deux points doubles, qui a son centre dans le plan des $\xi\eta$ au milieu de la droite qui joint ces deux points doubles, et dont le plan est perpendiculaire au plan des $\xi\eta$. Elle change également en eux-mêmes une infinité de cercles dont la propriété caractéristique est que toutes les sphères qui passent par ces cercles coupent orthogonalement le cercle C précédemment défini. Nous appellerons ce cercle C, cercle double de la substitution elliptique.

Si la substitution (1) est hyperbolique, il n'y a que deux points de l'espace qui ne sont pas altérés par la substitution, ce sont les deux points doubles situés dans le plan des $\xi\eta$. La substitution change en elles-mêmes toutes les circonférences et toutes les sphères qui passent par ces deux points.

Si la substitution (1) est parabolique, il n'y a qu'un seul point double inaltéré par cette opération qui change d'ailleurs en elles-mêmes toutes les circonférences et toutes les sphères qui sont tangentes au point double à une certaine droite du plan des $\xi\eta$.

Supposons enfin que la substitution (1) soit loxodromique; elle n'altérera pas le cercle C qui a pour diamètre la droite qui joint les points doubles et dont le plan est normal au plan des $\xi\eta$. Mais à l'exception des points doubles, elle altérera tous les points de ce cercle.

En résumé, toute substitution qui n'altère pas un point situé en dehors du plan des $\xi\eta$ est elliptique.

Nous avons vu plus haut que le substitution (1) généralisée transforme toute figure infiniment petite en une figure infiniment petite semblable. Cherchons le rapport de similitude. Si l'on considère une inversion unique, il est évident que les dimensions homologues de deux figures infiniment petites transformées l'une de l'autre, seront entre elles comme les coordonnées ζ des centres de gravité de ces figures. Il en sera donc de même quand au lieu d'une inversion unique on envisagera la résultante de plusieurs inversions, c'est à dire la substitution (1) généralisée.

Si donc on appelle ds, dw ou dv un arc de courbe infiniment petit, ou une aire plane ou courbe infiniment petite, ou un volume infiniment petit, et si ζ est la distance de cet arc, de cette aire ou de ce volume au plan des $\xi\eta$, si on appelle ds', dw' ou dv' les transformés de ds, dw ou dv par la substitution (1) généralisée et si ζ' est la distance de ds', dw' ou dv' au plan des $\xi\eta$, on aura:

$$\text{(6)} \qquad \frac{ds}{\zeta} = \frac{ds'}{\zeta'}, \qquad \frac{dw}{\zeta^2} = \frac{dw'}{\zeta'^2}, \qquad \frac{dv}{\zeta^3} = \frac{dv'}{\zeta'^3}.$$

Nous dirons que deux figures sont *congruentes* lorsqu'elles seront transformées l'une de l'autre par une opération telle que la substitution (1) généralisée.

Nous appellerons L d'un arc, l'intégrale:

$$\int \frac{ds}{\zeta}$$

étendue aux différents éléments de cet arc. Nous appellerons S d'une aire plane ou courbe, l'intégrale

$$\int \frac{dw}{\zeta^2}$$

étendue aux divers éléments de cette aire et enfin nous appellerons V d'un solide, l'intégrale

$$\int \frac{dv}{\zeta^3}$$

étendue aux divers éléments de ce solide.

Il résulte des équations (6) que deux arcs congruents ont même L, que deux aires congruentes ont même S et deux solides congruents même V.

Supposons maintenant que l'on enlève aux mots droite et plan leur signification pour appeler droite ou plan toute circonférence ou toute sphère qui coupe orthogonalement le plan des $\xi\eta$. Supposons aussi qu'enlevant aux mots longueurs, surfaces et volumes leur signification, on appelle ainci ce que nous venons d'appeler L, S et V. Supposons enfin qu'on conserve aux mots circonférence, sphère et angle leur signification habituelle. On reconnaîtra alors qu'interprétés de la sorte, tous les théorèmes de la géométrie non-euclidienne de LOBATSCHEWSKI, c'est à dire de la géométrie qui n'admet pas le postulatum d'EUCLIDE, sont parfaitement exacts. On voit aussi quel lien il y a entre la théorie des substitutions linéaires et la géométrie non-euclidienne. C'est de ce même lien que M. KLEIN a fait usage pour trouver tous les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire.

§ 2. *Groupes discontinus.*

Je me propose de former les groupes discontinus qui sont dérivés d'un nombre fini de substitutions linéaires à coëfficients imaginaires. Mais avant d'aller plus loin, il y a lieu de faire une distinction qui n'avait pas de raison d'être dans la théorie des groupes fuchsiens, mais qui est ici d'une importance capitale. Cette distinction a été très nettement établie par M. KLEIN (Mathematische Annalen, Bd XXI, page 176).

Nous appellerons substitution infinitésimale toute substitution linéaire telle que les modules de $\alpha - 1$, β, γ, $\delta - 1$ soient infiniment petits.

Si un groupe contient une substitution infinitésimale, c'est à dire si l'on peut trouver dans ce groupe des substitutions telles que les quatre modules cités plus haut soient plus petits que toute quantité donnée sans être nuls, le groupe est continu.

Mais parmi les groupes qui ne satisfont pas à cette condition, c'est à dire parmi les groupes discontinus, il y a lieu de distinguer deux classes, que nous appellerons les groupes proprement et improprement discontinus.

Un groupe sera improprement discontinu dans le voisinage d'un point z, si dans un domaine D enveloppant le point z, on peut trouver une infinité de transformés de ce point par les substitutions du groupe, et cela quelque petit que soit le domaine D.

Le groupe sera proprement discontinu dans le cas contraire.

Si par exemple il s'agit d'un groupe de substitutions appliquées à une quantité réelle z, on pourra prendre pour le domaine D le segment de droite compris entre le point $z - \varepsilon$ et le point $z + \varepsilon$; s'il s'agit de substitutions appliquées à une quantité imaginaire z ou à un point z du plan, le domaine D sera un cercle ayant pour centre le point z; s'il s'agit d'un point P de l'espace, D sera une sphère ayant P pour centre, etc.

Pour éclaircir ce qui précède par un exemple simple, considérons le groupe formé par les substitutions:

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

où α, β, γ, δ sont des entiers réels, tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Il est clair que ce groupe ne contient pas de substitution infinitésimale, il est donc discontinu. On voit de plus que si z est réel, on peut choisir α, β, γ, δ de telle façon que

$$\operatorname{mod}\left(z - \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

soit aussi petit que l'on veut, sans être nul; tandis que cela est impossible si z est imaginaire. Le groupe est donc improprement discontinu pour z réel et proprement discontinu pour z imaginaire.

Ce qui fait que nous n'avons pas eu à faire cette distinction dans le cas des groupes fuchsiens, c'est que tout groupe discontinu formé de substitutions réelles est proprement discontinu toutes les fois que z est imaginaire. C'est ce que je vais démontrer ici; car la démonstration que je veux donner de ce fait permettra de comprendre plus facilement ce qui se rapporte au cas plus général qui nous occupe dans ce mémoire.

Soit G un groupe quelconque formé de substitutions réelles, soit z un point imaginaire quelconque; supposons que dans tout domaine D entourant le point z il y ait une infinité de transformés de ce point par des substitutions de G, je dis que ce groupe contiendra des substitutions infinitésimales.

En effet je dirai qu'une quantité qui dépend d'une variable ε est de l'ordre de ε si elle s'annule avec cette variable et qu'une substitution est de l'ordre de ε si $\alpha - 1$, $\delta - 1$, β et γ s'annulent avec ε. Cela posé:

1° Toute substitution Σ qui change z en $z + \zeta$, ζ étant une quantité infiniment petite de l'ordre de ε, peut être regardée comme la résultante d'une substitution elliptique S qui admet le point z comme point double et d'une substitution hyperbolique s qui est infinitésimale et de l'ordre de ε. Nous écrirons:

$$\Sigma = Ss.$$

2° Si s et s_1 sont deux substitutions de l'ordre de ε leur résultante ss_1 sera aussi infinitésimale et de l'ordre de ε.

3° Si s est une substitution de l'ordre de ε et S une substitution finie, la résultante de la substitution inverse de S, de s et de S, résultante que nous écrirons $S^{-1}sS$[1] sera infinitésimale et de l'ordre de ε.

[1] Nous désignerons suivant l'usage par la notation S^{-1} la substitution inverse de

4° Si S et S_1 sont deux substitutions elliptiques ayant le point z pour point double, elles seront permutables, c'est à dire que l'on aura:

$$(1) \qquad SS_1 = S_1 S, \qquad S_1 = S^{-1} S_1 S.$$

Maintenant par hypothèse nous avons dans le groupe une infinité de substitutions qui changent z en $z + \zeta$, $z + \zeta_1, \ldots$; ζ, $\zeta_1, \ldots$ étant des quantités de l'ordre de ε. Soient Σ et Σ_1 deux quelconques d'entre elles. On aura

$$\Sigma = Ss, \qquad \Sigma_1 = S_1 s_1$$

S et S_1 admettant le point z comme point double, s et s_1 étant infinitésimales.

La substitution

$$\Sigma \Sigma_1 \Sigma^{-1} \Sigma_1^{-1}$$

fera partie du groupe; elle ne se réduira pas à la substitution identique (z, z) parce qu'en général Σ et Σ_1 n'auront pas même point double.

Je dis qu'elle sera infinitésimale. En effet elle peut s'écrire:

$$SsS_1 s_1 s^{-1} S^{-1} s_1^{-1} S_1^{-1}$$

ou en vertu de la relation (1)

$$SsS^{-1} S_1 Ss_1 s^{-1} S^{-1} s_1^{-1} S_1^{-1}.$$

Or en appliquant les principes 2° et 3° de la page 58, on verrait successivement que SsS^{-1}, que $s_1 s^{-1}$, que $S(s_1 s^{-1})S^{-1}$, que $(Ss_1 s^{-1} S^{-1})s_1^{-1}$, que $S_1(Ss_1 s^{-1} S^{-1} s_1^{-1})S_1^{-1}$, et enfin que

$$(SsS^{-1})(S_1 Ss_1 s^{-1} S^{-1} s_1^{-1} S_1^{-1})$$

sont infinitésimales et de l'ordre de ε.

Le groupe contient donc une substitution infinitésimale, il est continu.

Mais si un groupe de substitutions réelles ne peut être improprement discontinu dans le voisinage d'un point z imaginaire, il peut au contraire être improprement discontinu dans le voisinage d'un point z réel. En effet les groupes fuchsiens de la 1ère, de la 2e et de la 5me familles,

S, par la notation SS_1 la résultante de S et de S_1, par la notation S^m la résultante de m substitutions S successives.

c'est à dire ceux dont les polygones générateurs n'ont pas de côté de la 2e sorte, sont improprement discontinus dans le voisinage de tous les points z réels. Au contraire les groupes fuchsiens des autres familles sont proprement discontinus dans le voisinage des points réels qui appartiennent à un côté de la 2e sorte du polygone générateur ou d'un de ses transformés; ils ne sont improprement discontinus que dans le voisinage des points singuliers.

Revenons à l'étude des groupes formés de substitutions imaginaires ou plutôt des substitutions plus générales définies dans le paragraphe précédent.

Je dis qu'un pareil groupe ne peut être improprement discontinu dans le voisinage d'un point P situé en dehors du plan des $\xi\eta$. Soit en effet un pareil point P situé au dessus du plan des $\xi\eta$ et un domaine D entourant ce point P. Supposons que quelque petit que soit ce domaine D, il contienne une infinité de transformés du point P par les substitutions du groupe; je dis que le groupe sera continu. En effet:

1° Soit Σ une substitution qui change P en P', la distance PP' étant infinitésimale de l'ordre de ε; je dis qu'on pourra écrire:

$$\Sigma = Ss,$$

S étant une substitution elliptique dont le cercle double passe par P et s étant une substitution hyperbolique infinitésimale de l'ordre de ε. En effet la substitution Σ^{-1} changera P' en P. Il existera une substitution hyperbolique infinitésimale qui changera P' en P puisque les points P' et P sont infiniment voisins. Je l'appelle s^{-1} et je pose:

$$\Sigma^{-1} = s^{-1}S^{-1} \quad \text{d'où} \quad \Sigma = Ss.$$

La substitution S n'altérera pas le point P; donc d'après les principes du paragraphe précédent, ce sera une substitution elliptique dont le cercle double passe par P. C. Q. F. D.

2° et 3°: Les principes 2e et 3e de la page 58 subsistent ici, cela est évident.

4° Si S et S_1 sont deux substitutions elliptiques ayant même cercle double, on aura:

$$SS_1 = S_1S, \qquad S_1 = S^{-1}S_1S.$$

5° Si S_1 est une substitution elliptique ayant pour cercle double C_1; si C'_1 est un cercle orthogonal au plan des $\xi\eta$, et rencontrant le cercle C en un point P sous un angle infiniment petit, on pourra poser:

$$S_1 = S'_1\sigma$$

S'_1 étant une substitution elliptique admettant C'_1 pour cercle double et σ étant une substitution elliptique infinitésimale.

Cela posé, nous avons par hypothèse dans le groupe une infinité de transformations Σ, Σ_1, $\Sigma_2, \ldots$ qui changent P en des points infiniment voisins. On aura:

$$\Sigma = Ss, \quad \Sigma_1 = S_1 s_1, \quad \Sigma_2 = S_2 s_2, \ldots$$

s, $s_1, \ldots$ seront infinitésimales pendant que S, S_1, $S_2, \ldots$ seront des substitutions elliptiques dont les cercles doubles passeront par P. On aura donc une infinité de substitutions elliptiques dont les cercles doubles passeront par P. Il faut de toute nécessité que l'on puisse trouver parmi elles deux substitutions S et S_1 dont les cercles doubles C et C_1 se coupent sous un angle nul ou infiniment petit. On pourra alors poser:

$$S_1 = S'_1\sigma$$

σ étant infinitésimale ou se réduisant à la substitution identique et S'_1 admettant même cercle double C que S de telle façon que l'on ait:

$$S'_1 = S^{-1}S'_1 S.$$

Considérons donc ces deux substitutions S et S_1 et les substitutions correspondantes Σ, Σ_1. La substitution

$$\Sigma\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1^{-1}$$

fera partie du groupe; je dis qu'elle sera infinitésimale. En effet elle peut s'écrire:

$$SsS_1s_1s^{-1}S^{-1}s_1^{-1}S_1^{-1}$$

ou bien

$$SsS'_1\sigma s_1s^{-1}S^{-1}s_1^{-1}\sigma^{-1}S_1'^{-1}$$

ou enfin:

$$T = SsS^{-1}S'_1S\sigma s_1s^{-1}S^{-1}s_1^{-1}\sigma^{-1}S_1'^{-1}.$$

Or en vertu du principe	3°	$T_1 = SsS^{-1}$	sera infinitésimale,			
» » » »	2°	$T_2 = \sigma s_1 s^{-1}$	»	»		
» » » »	3°	$T_3 = ST_2 S^{-1}$	»	»		
» » » »	2°	$T_4 = T_3 s_1^{-1} \sigma^{-1}$	»	»		
» » » »	3°	$T_5 = S'_1 T_4 S'^{-1}_1$	»	»		
Enfin » » » »	2°	$T = T_1 T_5$	»	»		

C. Q. F. D.

Ainsi donc si nous envisageons un groupe discontinu, il sera proprement discontinu pour tout point P situé en dehors du plan des $\xi\eta$. Il résulte de là que toute la partie de l'espace située au dessus de ce plan sera divisée en une infinité de régions $R_0, R_1, \ldots R_i, \ldots$; qu'à chacune de ces régions correspondra une des substitutions du groupe, à la région R_i par exemple la substitution S_i, et de telle façon que cette substitution S_i change R_0 en R_i. C'est tout à fait la même chose que ce que nous avons observé pour les groupes fuchsiens.

Mais ce que nous nous proposons, c'est d'obtenir des groupes de substitutions imaginaires proprement discontinus même pour les points du plan des $\xi\eta$. Ce sont ceux-là seuls en effet qui peuvent être utiles dans la théorie des fonctions.

Eh bien, rappelons-nous ce que nous avons observé pour les groupes fuchsiens. Ces groupes sont tous proprement discontinus pour les valeurs imaginaires de z, de sorte que la partie du plan située au-dessus de l'axe des quantités réelles, se trouve divisée en une infinité de polygones R_0, $R_1, \ldots R_i, \ldots$. Comment voit-on alors si le groupe reste proprement discontinu pour les valeurs réelles de z? Si le polygone R_0 n'a pas de côté de la 2^e^ sorte, c'est à dire s'il est tout entier au dessus de l'axe des quantités réelles, le groupe est improprement discontinu pour les valeurs réelles de z; il est proprement discontinu, au contraire, si R_0 a un côté de la 2^e^ sorte, c'est à dire si tout un côté de ce polygone appartient à l'axe des quantités réelles.

C'est la même chose ici; si la région R_0 définie plus haut est toute entière au dessus du plan des $\xi\eta$, ou n'a avec ce plan qu'un point commun ou une ligne commune, le groupe est improprement discontinu pour les points du plan des $\xi\eta$; il est proprement discontinu, au contraire, si une portion de la surface de la région R_0 appartient à ce plan.

§ 3. *Polygones générateurs.*

Considérons un groupe de substitutions imaginaires proprement discontinu, même pour les points du plan des $\xi\eta$.

Nous dirons que c'est un groupe kleinéen. Un pareil groupe subdivisera une partie du plan des $\xi\eta$ en une infinité de régions $R_0, R_1, \ldots R_i, \ldots$, de telle façon qu'à chaque région R_i corresponde une substitution S_i du groupe qui change R_0 en R_i. Considérons la région R_0 et une autre région quelconque R_1 limitrophe de R_0; elles seront séparées par une portion du périmètre de R_0 qui leur servira de frontière commune et que j'appellerai *côté* de R_0. Maintenant un pareil côté pourra être une courbe fermée ou un arc de courbe limité à deux points qui seront des *sommets* de R_0. Soit C un quelconque des côtés de R_0, il y aura toujours un autre côté C' de R_0, tel qu'une des substitutions du groupe change C en C'. Les côtés C et C' seront dits conjugués.

La subdivision du plan ou d'une partie du plan en une infinité de régions R peut se faire d'une infinité de manières. (Cf §§ 4 et 9 du Mémoire sur les groupes fuchsiens.) Commençons par donner quelques définitions. La région R_0 s'appellera polygone générateur du groupe; je dirai que deux régions R et R'' sont équivalentes par rapport à un groupe G quand on peut passer de l'une à l'autre de la façon suivante: décomposons R en un certain nombre de parties r'_1, $r'_2 \ldots r'_p$. Soit r''_i la transformée de r'_i par une substitution S_i du groupe G. L'ensemble des régions partielles r''_i devra former la nouvelle région R''. Il est clair que si R_0 est un polygone générateur du groupe G, on pourra prendre aussi pour polygone générateur de ce groupe, toute région équivalente à R_0. Supposons en particulier qu'on retranche de R_0 une portion quelconque P_0 de sa surface et qu'on ajoute à R_0 la surface P'_0 transformée de P_0 par une quelconque des substitutions du groupe. On obtient ainsi une région $R'_0 = R_0 + P'_0 - P_0$ équivalente à R_0, et on pourra par conséquent remplacer le polygone générateur R_0 par le polygone R'_0.

Nous pouvons profiter de cette circonstance pour simplifier la région R_0. En effet, soit C un côté quelconque de R_0 et C' son conjugué. Si

C est un côté fermé, il en est de même de C'; si au contraire C est un côté ouvert ab, C' sera aussi un côté ouvert $a'b'$. Dans le premier cas appelons K un cercle quelconque; dans le second, K sera un arc de cercle limité aux deux sommets a et b du côté C. Soit maintenant K' le transformé de K par celle des substitutions du groupe qui change C en C'. Dans le premier cas, K' sera, comme K, un cercle fermé; dans le second cas, K' sera un arc de cercle limité aux deux sommets a' et b' du côté C'. Appelons P_0 la portion du plan comprise entre K et C; P'_0 la portion comprise entre K' et C'. P'_0 sera la transformée de P_0 par une des substitutions du groupe. Nous pourrons donc remplacer la région R_0 par $R'_0 = R_0 - P_0 + P'_0$. Dans la nouvelle région R'_0, les côtés C et C' sont remplacés par les côtés K et K' qui sont des arcs de cercle.

Il est bon de remarquer que la région R'_0 n'est pas ainsi entièrement définie, car le cercle K n'est pas absolument déterminé par les conditions que nous lui avons imposées.

En opérant de même sur chacun des côtés de R_0, on finira par arriver à remplacer R_0 par une région analogue dont tous les côtés seront des cercles ou des arcs de cercle.

On peut rencontrer ici la même difficulté que nous avons observée dans le § 4 du Mémoire sur les groupes fuchsiens. Il peut se faire que la région P_0 telle que nous l'avons définie ne fasse pas tout entière partie de R_0. Dans ces conditions on arriverait à une région R'_0 concave, au sens donné à ce mot dans le paragraphe cité; on tournerait la difficulté comme dans ce paragraphe.

Nous pouvons donc toujours supposer que la région R_0 est un polygone limité par des cercles et des arcs de cercle; mais il peut se faire que ce polygone ne soit pas simplement connexe, mais présente une connexion d'un ordre plus élevé.

Reportons-nous en effet au cas des groupes fuchsiens, à ceux de la 3^e famille, par exemple. Le polygone R_0 tel que nous l'avons défini dans le Mémoire des *Acta Mathematica 1* est simplement connexe et limité par des côtés de la 1ère et de la 2^e sorte, mais si on adjoint au polygone R_0, le polygone R'_0 symétrique de R_0 par rapport à l'axe des quantités réelles, la région totale $R_0 + R'_0$ qui est l'analogue de la région R_0 étudiée ici, sera multiplement connexe.

Nous serons conduits, ici comme dans le § 5 du Mémoire sur les groupes fuchsiens, à distribuer en cycles les sommets de R_0, mais comme nous n'avons ici rien d'analogue aux côtés de la 2^e sorte, nous n'aurons que des cycles *fermés* et pas de cycles *ouverts*. Soit A_0 un sommet quelconque de R_0; soient $A_1, A_2, \dots A_{n-1}$ les sommets qui appartiennent au même cycle que A_0, écrits dans l'ordre où on les rencontre en appliquant la règle du paragraphe cité. Décrivons autour de A_0 un contour infiniment petit et supposons qu'en suivant ce contour on rencontre successivement les polygones $R_0, R_1, R_2, \dots R_{n-1}, R_n, \dots$. Si $i < n$, le sommet A_0 considéré comme appartenant à R_i sera l'homologue de A_i; considéré comme appartenant à R_n, il sera l'homologue de A_0. Il suit de là que la substitution qui change R_0 en R_n admet A_0 pour point double. Elle peut être d'ailleurs elliptique, parabolique ou hyperbolique, mais non loxodromique. Cette quatrième hypothèse doit être rejetée.

En effet soit $K = \rho e^{i\omega}$ le multiplicateur d'une substitution loxodromique; soit p un nombre entier assez grand pour que $p\omega > 2\pi$. Désignons par Σ_0 l'ensemble des polygones $R_0, R_1, \dots R_{n-1}$; par Σ_1 l'ensemble des polygones $R_n, R_{n+1}, \dots R_{2n-1}$, c'est à dire la transformée de Σ_0 par notre substitution loxodromique; soit ensuite Σ_2 la transformée de Σ_1; Σ_3 celle de Σ_2, etc. Il est aisé de voir que Σ_p recouvrira partiellement l'une des régions $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots \Sigma_{p-1}$, ce qui est absurde puisque le groupe est supposé proprement discontinu.

Reste à examiner les trois premières hypothèses.

Dans le 1.^er cas, nous dirons que le cycle est elliptique [1]; la somme des angles du cycle devra être une partie aliquote de 2π.

Dans le 2^d cas, le cycle sera parabolique.

Tous les angles du cycle seront nuls.

Dans le 3^e cas, nous aurons un cycle hyperbolique, tous les angles du cycle seront encore nuls. Nous verrons dans le paragraphe suivant qu'on peut toujours remplacer le polygone R_0 par un autre équivalent et n'admettant pas de cycle hyperbolique [2].

---

[1] Les cycles que nous appelons ici elliptiques, paraboliques et hyperboliques sont analogues respectivement aux cycles de la 1^ère catégorie, de la 3^e sous-catégorie et de la 4^e sous-catégorie du Mémoire sur les groupes fuchsiens.

[2] Nous avons vu déjà aux §§ 9 et 11 du Mémoire sur les groupes fuchsiens et au § 2 du Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, que tout groupe du 2^d ordre de la 2^e,

Je dis maintenant qu'on peut toujours supposer qu'un cycle donné se compose d'un seul sommet. En effet, reprenons le polygone R_0, le sommet A_0 de ce polygone et les sommets $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ qui appartiennent au même cycle. Considérons aussi le contour infiniment petit que nous avons décrit autour de A_0 et les polygones $R_1, R_2, \ldots$ que l'on rencontre successivement en suivant ce contour. Soit S_i la substitution qui change R_0 en R_i. Décomposons le polygone R_0 en n polygones partiels $r_0, r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$, de telle façon que le polygone partiel r_i admette le sommet A_i et n'admette aucun des autres sommets $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$. Soit maintenant r'_i le transformé de r_i par S_i. Alors r'_0 ne différera pas de r_0; l'ensemble des régions partielles $r'_0, r'_1, \ldots r'_{n-1}$ formera un polygone R'_0 qui sera équivalent à R_0 et qui pourra par conséquent servir de polygone générateur pour notre groupe. Mais R'_0 admet le sommet A_0, et de telle façon que le cycle dont fait partie A_0 ne se compose que de ce seul sommet.

§ 4. *Polyèdres générateurs.*

Considérons maintenant la moitié de l'espace située au dessus du plan des $\xi\eta$ et la subdivision de cette portion de l'espace en une infinité de régions $P_0, P_1, \ldots P_i, \ldots$, telles que la substitution S_i de notre groupe change P_0 en P_i.

Considérons la région P_0 et une région quelconque P_1 limitrophe de P_0; elles seront séparées par une portion de la surface de P_0 que j'appellerai une *face* de P_0; je dirai que ce sera une face de la 1[ère] sorte. Si une portion du plan des $\xi\eta$ fait partie de la superficie de P_0, ce sera une face de la 2[e] sorte. Ces dénominations sont tout à fait analogues à celles que nous avons employées dans la théorie des groupes fuchsiens.

de la 4[e], de la 6[e] ou de la 7[e] familles, est identique à un groupe de la 3[e] ou de la 5[e] familles, ou à un groupe du 1[er] ordre de la 6[e] ou de la 7[e] familles. En d'autres termes, si le polygone générateur d'un groupe fuchsien admet un cycle de la 4[e] sous-catégorie, on peut toujours par le procédé du § 9 le remplacer par un autre polygone n'admettant pas de cycle de cette catégorie. Il en est de même ici.

Deux faces limitrophes de P_0 seront séparées par une *arête*. Cette arête sera de la 1ère sorte si elle sépare deux faces de la 1ère sorte et de la 2e sorte si elle sépare une face de la 1ère sorte et une de la 2e sorte. Les faces de la 1ère sorte seront conjuguées deux à deux, de telle façon que chacune de ces faces soit changée en sa conjuguée par l'une des substitutions du groupe. Il résulte de là que deux faces conjuguées sont congruentes.

De même que les faces se répartissent en paires, de même les arêtes se répartissent en cycles à la façon des sommets des polygones générateurs. Soit A_0 une arête quelconque de la 1ère sorte; voici comment on trouvera les arêtes du même cycle. Soit F_0 l'une des faces que sépare l'arête A_0; F'_0 sa conjuguée; les faces F_0 et F'_0 sont congruentes. Soit A_1 celle des arêtes de F'_0 qui est homologue de A_0; elle séparera la face F'_0 d'une autre face F_1. Nous opérerons sur la face F_1 et sur l'arête A_1 comme nous avons opéré sur la face F_0 et l'arête A_0. Nous obtiendrons ainsi une suite de faces $F_0, F_1, F_2, F_3, \ldots$, et une suite d'arêtes $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$ et nous nous arrêterons quand nous retomberons sur l'arête A_0. Toutes les arêtes ainsi obtenues feront partie d'un même cycle.

Soient $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ ces arêtes que je suppose au nombre de n. Supposons qu'autour de l'arête A_0 nous décrivions un contour infiniment petit; en décrivant ce contour on traversera successivement q régions P_0, $P_1, \ldots P_{q-1}$. Si $i < n$, l'arête A_0 considérée comme appartenant à P_i sera l'homologue de A_i; considérée comme appartenant à P_n, elle sera l'homologue de A_0. Ainsi la substitution qui change P_0 en P_n n'altère pas A_0. Il suit de là:

1° que $\frac{q}{n}$ est un nombre entier.

2° que la substitution qui change P_0 en P_n est elliptique et a pour multiplicateur $e^{2i\pi\frac{n}{q}}$.

3° que *l'arête A_0 est un cercle symétrique par rapport au plan des $\xi\eta$.*

4° que la somme des dièdres relatifs aux différentes arêtes du cycle est une partie aliquote de 2π.

Ainsi toutes les arêtes de la 1ère sorte sont des circonférences dont le plan est perpendiculaire au plan des $\xi\eta$ et dont le centre est dans ce plan.

Les extrémités des arêtes s'appelleront des sommets. Parmi les sommets nous distinguerons:

1° ceux qui sont en dehors du plan des $\xi\eta$, auxquels aboutissent trois ou plusieurs arêtes de la 1ère sorte.

2° ceux qui sont sur le plan des $\xi\eta$, auxquels aboutiront une ou plusieurs arêtes de la 1ère sorte et deux arêtes de la 2e sorte.

3° Il faut ajouter aussi les *sommets isolés.* Si deux faces sont tangentes entre elles, le point de contact peut être en effet regardé comme un sommet et cependant il n'appartient à aucune arête.

Il est clair que l'on peut remplacer, comme dans le paragraphe précédent, la région P_0 par toute autre région P'_0 *équivalente.* Je dis qu'on pourra toujours s'arranger de telle façon que P'_0 soit un polyèdre limité par des sphères ou par des portions de sphères. Toutes les faces de la 1ère sorte seront des sphères ou portions de sphères ayant leur centre dans le plan des $\xi\eta$; toutes les arêtes seront des circonférences ou des arcs de cercle.

Soit en effet F une face quelconque de la première sorte, F' sa conjuguée; S la substitution qui change F en F'. Plusieurs cas sont possibles:

1° ou bien la face F est limitée par une arête de la 2e sorte et cette arête est une courbe fermée. On appellera alors F_1 une demi-sphère quelconque ayant son centre dans le plan des $\xi\eta$, et Q_0 la région limitée par F et F_1; la substitution S changera alors F_1 en une autre demi-sphère F'_1 et Q_0 en Q'_0 région limitée par F' et F'_1. Les régions P_0 et $P'_0 = P_0 - Q_0 + Q'_0$ seront alors équivalentes.

2° ou bien la face F est limitée par deux arêtes dont une de la 1ère sorte et admet deux sommets. On raisonnera de la même façon; on devra seulement s'astreindre à faire passer la sphère F_1 par l'arête de la 1ère sorte, qui est une circonférence d'après ce qu'on a vu plus haut.

3° ou bien la face F admet plusieurs arêtes de la 1ère sorte situées sur une même sphère Σ qui a son centre dans le plan des $\xi\eta$. Dans ce cas la sphère F_1 devra être la sphère Σ.

4° ou bien enfin les différentes arêtes de la 1ère sorte de la face F ne sont pas sur une même sphère ayant son centre dans le plan des $\xi\eta$. Dans ce cas, nous pourrons partager la face F en plusieurs autres f, f', f''. Je supposerai par exemple que la face partielle f

n'est contigüe qu'à la face f', que f' n'est contigüe qu'à f et à f''; f'' à f' et à f''', etc. Je supposerai que la face partielle f est séparée de la face f' par une ligne α', dont les extrémités sont β' et γ'; que la face f' est séparée de la face f'' par une ligne α'' dont les extrémités sont β'' et γ'', etc. Je supposerai que toutes les arêtes de la 1ère sorte contenues dans f et les sommets β' et γ' sont sur une même sphère f_1 ayant son centre dans le plan des $\xi\eta$; que les arêtes de la 1ère sorte contenues dans f' et les sommets β', γ', β'', γ'' sont sur une même sphère f'_1 ayant son centre dans le plan des $\xi\eta$, etc. et ainsi de suite. On envisagera la portion de f_1 limitée par les arêtes de la 1ère sorte de f et par l'intersection de f_1 et de f'_1; la portion de f'_1 limitée par les arêtes de la 1ère sorte de f' et par les intersections de f'_1 avec f_1 et f''_1, etc. L'ensemble de ces portions de surfaces sphériques formera la nouvelle face F_1 sur laquelle on raisonnera comme plus haut.

Dans tous les cas on aura remplacé la région P_0 par une autre équivalente, mais où les faces F et F' seront remplacées par les faces F_1 et F'_1 formées de portions de sphères ayant leurs centres dans le plan des $\xi\eta$. En opérant de même sur toutes les faces de la 1ère sorte de la région P_0, on remplacera cette région par une autre équivalente dont toutes les faces de la 1ère sorte seront formées de pareilles portions de surfaces sphériques.

En résumé nous pourrons toujours supposer que notre région P_0 est un polyèdre dont toutes les faces de la 1ère sorte sont des portions de sphères ayant leurs centres dans le plan des $\xi\eta$. Nous l'appellerons polyèdre générateur du groupe.

On voit aisément qu'un pareil polyèdre ne peut avoir de *sommet isolé* en dehors du plan des $\xi\eta$.

Les faces de la 2e sorte du polyèdre générateur P_0 seront des polygones limités par des arcs de cercle, et ces arcs de cercle seront les traces des faces de la 1ère sorte sur le plan des $\xi\eta$. Ces polygones peuvent être regardés comme les polygones générateurs d'un groupe kleinéen.

Supposons que notre polyèdre P_0 ait n faces de la 2e sorte F_0^1, $F_0^2, \ldots F_0^n$; le polyèdre homologue P_i aura aussi n faces de la 2e sorte F_i^1, $F_i^2, \ldots F_i^n$. Si l'on excepte certains points ou certaines lignes singulières, tout point du plan des $\xi\eta$ appartient à l'une des faces F_i^k de

l'un des polyèdres P_i, et il ne peut d'ailleurs appartenir qu'à l'une d'elles, puisque aucun point de l'espace n'appartient à plus d'un polyèdre P_i.

Le groupe est donc proprement discontinu même pour les points du plan des $\xi\eta$, si l'on excepte toujours les points et les lignes singulières dont il a été question plus haut.

Le groupe considéré est donc kleinéen.

Le plan des $\xi\eta$ sera partagé en n régions $R^1, R^2, \ldots R^n$; la région R^k se subdivise elle-même en une infinité de polygones $F_0^k, F_1^k, F_2^k, \ldots F_i^k, \ldots$ telles que la substitution S_i change F_0^k en F_i^k.

Ainsi on peut prendre pour polygone générateur du groupe, l'une quelconque des faces de la 2^e^ sorte du polyèdre générateur, c'est à dire un polygone ayant pour côtés les cercles qui ont même centre et même rayon que les sphères qui forment les faces de la 1^ère^ sorte de ce polyèdre.

La réciproque n'est pas vraie. Considérons un groupe kleinéen quelconque, et soit R_0 l'un des polygones que l'on peut choisir pour son polygone générateur; construisons les sphères qui ont même centre et même rayon que les arcs de cercle qui servent de côtés à ce polygone et envisageons le polyèdre P_0 limité par ces sphères. En général ce ne sera pas un polyèdre générateur du groupe. En effet dans un polyèdre générateur deux faces conjuguées doivent être congruentes. Or considérons un côté quelconque bc de R_0, les côtés adjacents ab et cd, le côté conjugué $b'c'$, les côtés adjacents $a'b'$ et $c'd'$. Construisons les sphères S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 correspondant respectivement à ces six côtés. A chaque côté de R_0 correspondra une face de P_0. Au côté bc correspondra la portion de la surface de S_1 qui est limitée par l'intersection de cette sphère avec S_2 et S_3; au côté $b'c'$ correspondra la portion de la surface de S_4 qui est limitée par l'intersection de cette sphère avec S_5 et S_6. Ce devraient être là deux faces conjuguées de P_0; or ces deux faces ne seront pas en général congruentes.

Pour que le polyèdre P_0 soit un polyèdre générateur du groupe, il faut et il suffit que ses faces conjuguées soient congruentes, et pour cela, voici quelle est la condition nécessaire et suffisante.

Soit encore bc un côté de R_0, ab et cd les côtés adjacents, $b'c'$ le côté conjugué, $a'b'$ et $c'd'$ les côtés adjacents. Prolongeons les cercles dont font partie ces six côtés. Soit b_1 le second point d'intersection des cercles ab et bc, et de même c_1, b'_1, c'_1 les intersections respectives de

bc et de cd; de $a'b'$ et de $b'c'$; de $b'c'$ et de $c'd'$. Le rapport anharmonique des quatre points bcb_1c_1 doit être égal à celui des quatre points $b'c'b'_1c'_1$.

Parmi les polygones équivalents à R_0, qui sont en nombre infini et qui peuvent être choisis comme polygones générateurs, il y en a toujours qui remplissent cette condition, puisque tout groupe kleinéen est proprement discontinu pour les points non situés sur le plan des $\xi\eta$ et admet par conséquent un polyèdre générateur. Nous supposerons toujours que le polygone R_0 a été choisi de façon à satisfaire à cette condition.

A chaque côté de R_0 correspondra alors une face de P_0; à deux côtés conjugués, correspondront deux faces conjuguées. A chaque sommet de R_0 appartenant à un cycle elliptique correspondra une arête de P_0 et aux divers sommets d'un même cycle, correspondront les diverses arêtes d'un même cycle; à un sommet de R_0 appartenant à un cycle parabolique ou hyperbolique correspondra un sommet isolé de P_0. On voit ainsi que les sommets isolés de P_0 se répartissent en cycles.

Je dis maintenant qu'on peut toujours supposer que R_0 et par conséquent P_0 n'admettent pas de cycle hyperbolique. En effet supposons que P_0 admette un sommet isolé appartenant à un cycle hyperbolique, je dis qu'on pourra remplacer ce polyèdre par un autre équivalent n'admettant pas de cycle hyperbolique. En effet, d'après ce qu'on a vu à la fin du paragraphe précédent, on peut toujours supposer que ce cycle hyperbolique se compose d'un seul sommet A.

Le sommet A est un sommet isolé de P_0, c'est à dire qu'il est le point de contact de deux faces de la 1^ère^ sorte de P_0, tangentes l'une à l'autre, et que j'appellerai F et F'. Ces deux faces sont conjuguées; car si elles ne l'étaient pas, le cycle dont fait partie A devrait contenir encore d'autres sommets. Une des substitutions du groupe, que j'appelle S, changera F en F', et elle sera hyperbolique, par hypothèse. La face F ne sera limitée par aucune arête, ou bien elle le sera par une seule arête, ou bien par plus d'une arête. Je dis d'abord qu'on peut toujours supposer que le troisième cas ne se présentera pas. En effet s'il se présentait, on tracerait sur la face F une demi-circonférence, dont le plan devrait être perpendiculaire au plan des $\xi\eta$, et qui devrait être assez petite pour être toute entière contenue dans la face F; cela est toujours possible. Cette demi-circonférence partagerait la face F en deux autres F_1 et F_2; F_1 contiendrait par exemple le sommet A; la face F' congru-

ente à F se diviserait de même en deux autres F_1'' et F_2' congruentes respectivement à F_1 et à F_2. Le sommet A fera alors partie de deux faces F_1 et F_1'' qui ne seront limitées que par une seule arête.

Supposons donc que la face F admette au plus une arête. Construisons une sphère Φ peu différente de F. Si la face F admet une arête, j'assujettirai la sphère Φ à passer par cette arête. La substitution hyperbolique S changera Φ en une autre sphère Φ', et l'on aura toujours pu choisir Φ de telle façon que ces deux sphères ne se coupent ni ne se touchent. Il suffit pour cela que la sphère Φ diffère suffisamment peu de F et que, si A et B sont les deux points doubles de la substitution S, ces deux points soient l'un intérieur, l'autre extérieur à Φ. Soit p_0 la portion de l'espace comprise entre Φ et F, p_0' la portion comprise entre Φ' et F'. La substitution S changera p_0 en p_0'. Le polyèdre $P_0' = P_0 - p_0 + p_0'$ est donc équivalent à P_0; donc il peut servir de polyèdre générateur. Mais il ne possède plus le sommet hyperbolique A, puisque les sphères Φ et Φ' ne se coupent pas.

Nous pouvons donc toujours supposer que notre polygone R_0 et notre polyèdre P_0 ne présentent pas de cycle hyperbolique; c'est ce que nous ferons désormais.

§ 5. *Existence des groupes kleinéens.*

Supposons un polyèdre générateur P_0 satisfaisant aux conditions énoncées dans le paragraphe précédent: ses faces conjuguées sont congruentes, ses arêtes de la 1ère sorte se répartissent en cycles elliptiques, de telle façon que la somme des dièdres correspondant aux arêtes d'un même cycle soit une partie aliquote de 2π. Le groupe correspondant à ce polyèdre est entièrement défini. Il reste à démontrer que ce groupe est discontinu, c'est à dire que les polyèdres transformés de P_0 remplissent toute la partie de l'espace située au-dessus du plan des $\xi\eta$ et ne se recouvrent pas mutuellement.

La démonstration est tout à fait la même que dans le cas des groupes fuchsiens.

Soit en effet A un point quelconque intérieur à P_0, B un point situé au dessus du plan des $\xi\eta$. Joignons A à B par un arc de courbe AMB ne coupant pas ce plan. Cet arc sortira du polyèdre P_0 par une face de la 1$^{\text{ère}}$ sorte, on pourra construire le polyèdre P_1 limitrophe de P_0 le long de cette face; l'arc AMB sortira de P_1 par une certaine face, on construira le polyèdre P_2 limitrophe de P_1 le long de cette face, et ainsi de suite.

Voici ce que nous avons à démontrer:

1° Qu'après un nombre fini d'opérations on arrive à un polyèdre P_n à l'intérieur duquel se trouve le point B.

2° Que si le point B se confond avec le point A, de telle façon que l'arc AMB se réduise à un contour fermé AMA, le polyèdre P_n se confond avec P_0.

Le premier point s'établit comme dans la théorie des groupes fuchsiens.

La L de l'arc AMB étant une longueur finie L, je dis que cet arc ne pourra rencontrer qu'un nombre fini de polyèdres P, ou, ce qui revient au même, un nombre fini de faces F de la 1$^{\text{ère}}$ sorte appartenant à ces polyèdres. En effet, on établit aisément les lemmes suivants.

I. On peut trouver un nombre entier v assez grand pour que v polyèdres P quelconques et v faces F quelconques ne puissent avoir d'autre point commun qu'un sommet parabolique.

II. Si v faces n'ont pas de sommet parabolique commun et n'ont par conséquent aucun point commun, et si un arc de courbe traverse ces v faces, la L de cet arc est supérieure à une certaine limite λ.

III. Tout arc qui ne rencontre pas le plan des $\xi\eta$, ne peut traverser qu'un nombre fini de faces F ayant un sommet parabolique commun. (Voir §§ 1 et 6 du Mémoire sur les groupes fuchsiens.)

Il résulte de là que quand l'arc AMB aura traversé $\frac{vL}{\lambda}$ faces F, il ne pourra plus traverser que des faces ayant un sommet parabolique commun, et en vertu du lemme III, il n'en traversera qu'un nombre fini.

Le premier point une fois démontré, le second s'établit sans peine. En effet on voit immédiatement qu'il suffit de le démontrer pour un contour AMA infiniment petit. Or le théorème est évident pour un

pareil contour, soit qu'il ne tourne pas autour d'une arête de la 1ère sorte, soit même qu'il tourne autour d'une pareille arête, puisque par hypothèse, cette arête fait partie d'un cycle dont la somme des dièdres est une partie aliquote de 2π.

Pour les détails de la démonstration, je renverrai au § 6 du Mémoire sur les groupes fuchsiens.

Ainsi les polyèdres P_i ne se recouvrent pas mutuellement; si P_0 admet une face de la 2e sorte R_0 dont les transformées sont les faces R_i des polyèdres P_i, ces faces R_i ne se recouvrent pas non plus mutuellement. Ainsi notre *polygone générateur et ses transformés ne se recouvrent pas.*

C'est ce point que je voulais établir, et, pour y parvenir, j'ai eu recours à un artifice dont je ne pouvais guère me dispenser dans le cas général; j'ai dû passer du plan à l'espace, et des polygones R aux polyèdres P. Mais si ce détour est nécessaire dans le cas le plus général, on peut s'en affranchir dans un grand nombre de cas particuliers; c'est ce que nous verrons plus loin.

§ 6. *Classification.*

Parmi les groupes kleinéens, il en est qui doivent attirer particulièrement l'attention à cause de leur importance au point de vue des applications. Ce sont ceux dont les groupes fuchsiens sont des cas particuliers, de telle sorte qu'on peut passer d'un pareil groupe kleinéen à un groupe fuchsien en faisant varier d'une *façon continue* certains paramètres. Ce seront les groupes de la 1ère espèce.

Ceux de la 2e espèce seront ceux qui ne jouiront pas de cette propriété.

On peut classer aussi les groupes kleinéens en genres. Nous définirons le genre du polygone générateur R_0 comme dans le § 8 du Mémoire sur les groupes fuchsiens et le genre d'un groupe sera celui de son polygone générateur.

Voici maintenant quelque chose d'analogue à la classification en familles.

Nous classerons d'abord les polyèdres générateurs d'après le nombre de leurs faces de la 2e sorte. C'est là en effet un point fort important; car si un polyèdre P_0 a n faces de la 2e sorte, le plan des $\xi\eta$ se trouve divisé en n parties et chacune de ces parties en une infinité de polygones R de telle façon qu'à chaque substitution du groupe corresponde un polygone R et un seul.

Nous classerons ensuite les polyèdres qui admettent un même nombre de faces de la 2e sorte en familles, selon qu'ils admettent ou n'admettent pas des cycles elliptiques, ou des cycles paraboliques.

Donnons le détail de cette classification pour les groupes les plus importants qui sont ceux de la 1ère espèce, en conservant aux familles les mêmes numéros que dans la théorie des groupes fuchsiens.

1° Polyèdres admettant 2 faces de la 2e sorte.

1ère famille. Admettent des cycles elliptiques.
2e famille. Admettent des cycles paraboliques.
6e famille. Admettent des cycles elliptiques et paraboliques.

2° Polyèdres admettant 1 face de la 2e sorte.

3e famille. Polyèdres dont toutes les faces de la 1ère sorte sont des demi-sphères complètes, ne se coupant ni ne se touchant mutuellement et qui n'admettent ni cycle elliptique, ni cycle parabolique.
4e famille. Admettent des cycles paraboliques.
5e famille. Admettent des cycles elliptiques.
7e famille. Admettent des cycles elliptiques et paraboliques.

§ 7. *Troisième famille.*

Voici quel est le mode de génération des groupes de la 3e famille.

Considérons $2n$ cercles qui ne se coupent ni ne se touchent; je supposerai, pour fixer les idées, que ces $2n$ cercles soient tous extérieurs les uns aux autres. Le polygone R_0 sera la portion du plan qui est extérieure à la fois à tous ces cercles. J'appelle ces cercles $C_1, C_2, \ldots C_n$; $C'_1, C'_2, \ldots C'_n$. Je suppose que les cercles C_i et C'_i soient conjuguées.

Soit S_i une substitution qui change C_i en C'_i et de telle façon que l'extérieur de C_i se change dans l'intérieur de C'_i. S_i est alors une substitution hyperbolique ou loxodromique dont un point double est intérieur à C_i et l'autre à C'_i.

Le groupe dérivé des substitutions S_i est alors un groupe kleinéen de la 3^{me} famille.

Pour démontrer que ce groupe est discontinu, il n'est pas nécessaire d'avoir recours à la marche détournée du § 5. En effet, construisons le polygone R_i limitrophe de R_0 le long de C'_i, c'est à dire le transformé de R_0 par la substitution S_i; il sera tout entier à l'intérieur de C'_i. L'ensemble des polygones R_0 et R_i se compose alors de la partie du plan extérieure à la fois à $4n - 2$ cercles (extérieurs les uns aux autres) qui servent de côtés à ces deux polygones. Soit C_k l'un de ces cercles; si l'on veut construire le polygone R_k limitrophe de R_0 ou de R_i le long de C_k, ce polygone sera tout entier intérieur à C_k et ainsi de suite. On voit aisément en continuant de la sorte que les polygones ainsi construits ne peuvent se recouvrir mutuellement, et par conséquent que le groupe est discontinu.

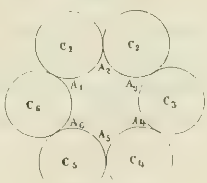
Quelles sont maintenant les conditions imposées aux substitutions S_i? Ces n substitutions doivent être telles que l'on puisse trouver n cercles $C_1, C_2, \ldots C_n$, de telle façon que ces n cercles et leurs transformés respectifs $C'_1, C'_2, \ldots C'_n$ soient tous extérieurs les uns aux autres. Ce ne sont là que des conditions d'inégalité; ainsi le groupe dérivé de n substitutions est discontinu, pourvu que les coëfficients de ces substitutions satisfassent à certaines inégalités.

Parmi les groupes de la 3^{me} famille il en est qui méritent une mention particulière. On peut supposer que le polygone R_0 est symétrique par rapport à un certain cercle C_{n+1}, de telle façon que les cercles conjuguées C_i et C'_i soient symétriques l'un de l'autre, et que toutes les substitutions du groupe puissent s'obtenir en combinant les inversions par rapport aux cercles $C_1, C_2, \ldots C_n, C_{n+1}$. Nous dirons alors que le groupe est symétrique.

§ 8. *Deuxième Famille.*

Supposons que $2n$ cercles C_1, C_2, ... C_n, soient situés de telle sorte 1° qu'ils soient tous extérieurs les uns aux autres; 2° que le cercle C_i touche extérieurement les cercles C_{i-1} et C_{i+1}; 3° que le cercle C_{2n} touche extérieurement les cercles C_{2n-1} et C_1. Appelons A_i le point de contact des cercles C_{i-1} et C_i et A_1 le point de contact des cercles C_n et C_1. Le plan se trouve divisé en trois parties: 1° le polygone R_0 extérieur à chacun des cercles C et intérieur à la figure formée par l'ensemble de ces cercles; ce sera notre polygone générateur; 2° le polygone R'_0 extérieur à la fois à tous ces cercles et à la figure formée par leur ensemble; 3° enfin l'intérieur des divers cercles C.

Fig. 1.



Si nous formons le polyèdre générateur P_0, ce polyèdre présentera $2n$ faces de la 1ère sorte formées par les surfaces des sphères qui ont même centre et même rayon que les cercles C; 2 faces de la 2e sorte qui seront les polygones R_0 et R'_0 et $2n$ sommets isolés A_1, A_2, ... A_{2n}. Je supposerai que les faces C_i et C_{2n+1-i} sont conjuguées et que le polyèdre admet $n + 1$ cycles paraboliques, formés respectivement des sommets A_1; A_2 et A_{2n}; ... A_i et A_{2n+1-i}; ...; A_n et A_{n+2}; A_{n+1}. Cela suppose que nous avons entre les sommets A la relation:

$$(A_2 - A_1)(A_4 - A_3) \dots (A_{2n} - A_{2n-1}) = (A_3 - A_2)(A_5 - A_4) \dots (A_1 - A_{2n}).$$

Ici, comme dans le paragraphe précédent, la discontinuité du groupe peut se démontrer directement, sans qu'il soit besoin de recourir à l'artifice du § 5. On voit que le plan se décompose en deux domaines D et D'; le premier est recouvert par le polygone R_0 et ses transformés, le second par le polygone R'_0 et ses transformés. Ces deux domaines sont séparés par une ligne L, si l'on peut appeler cela une ligne.

Supposons que l'on ait construit un certain nombre de polygones R_0, R_1, ... R_n et les polygones correspondants R'_0, R'_1, ... R'_n. On sera certain: 1° que tout point faisant partie de l'un des polygones R appar-

tiendra au domaine D; 2° que tout point faisant partie de l'un des polygones R' appartiendra au domaine D'; 3° que tout sommet de l'un des polygones R appartient à la ligne L.

Les sommets de divers polygones R forment *eine unendliche Punktmenge*(1) P et pour obtenir la ligne L, il faut ajouter à cette *Punktmenge* son *erste Ableitung* P'. On voit que la ligne L est *eine perfecte und zusammenhängende Punktmenge.* C'est dans ce sens que c'est une ligne. Mais nous allons voir qu'elle ne jouit pas de toutes les propriétés que nous sommes habitués à attribuer aux lignes.

Cherchons d'abord si cette ligne possède une tangente. A ce point de vue nous devons distinguer les points de la *Punktmenge* P et ceux qui appartiennent à son *Ableitung* P' sans appartenir à P. Envisageons d'abord un point de P; je dis qu'en ce point il y aura une tangente. D'abord nous pouvons supposer que ce point est un sommet de R_0, car rien ne distingue R_0 des autres polygones R_i; nous pouvons supposer que ce point est précisément A_1, car ce qui distingue A_1 des autres sommets de R_0, c'est que le cycle dont fait partie A_1 ne contient pas d'autre sommet; or nous avons vu à la fin du § 3 que l'on peut toujours supposer qu'un cycle donné ne se compose que d'un seul sommet. Le groupe envisagé contiendra alors une certaine substitution parabolique S qui aura A_1 pour point double. Soit

$$\left(\frac{1}{z - A_1}, \frac{1}{z - A_1} + h\right)$$

cette substitution. Soit N un point tel que:

$$\arg (N - A_1) = - \arg h.$$

Joignons $A_1 N$, je dis que $A_1 N$ sera tangente à notre ligne L. Voici ce que j'entends par là. Supposons que ρ et ω soient les coordonnées polaires d'un point de L en prenant A_1 pour pôle et $A_1 N$ pour axe polaire; je dis que quand ρ tendra vers 0, ω tendra vers 0, de telle façon que $A_1 N$ sera la limite d'une sécante $A_1 B_1$ de la ligne L, lorsque le point B_1 se rapprochera indéfiniment de A_1.

Pour démontrer cela, je vais construire deux cercles K et K' se

(1) Pour le sens précis des diverses expressions allemandes que je vais employer, voir Cantor: *Grundlagen einer Mannichfaltigkeitslehre.* Leipzig, Teubner 1883. Voir aussi la traduction française de ce mémoire: *Acta mathematica.* **2**, pag. 381—408.

touchant extérieurement en A_1 et tangents tous deux à A_1N. Je choisirai le cercle K de telle façon qu'il coupe les côtés A_1A_2 et A_1A_{2n} du polygone R_0 et ne coupe aucun autre côté de ce polygone. De même le cercle K' devra couper les côtés A_1A_2 et A_1A_{2n} du polygone R'_0 et ne couper aucun autre côté de ce polygone. Soit r_0 la partie de R_0 qui est intérieure à K et r'_0 la partie de R'_0 qui est intérieure à K'. Il est clair que les transformés successifs de r_0 par les puissances positives et négatives de la substitution S rempliront tout ce cercle K, de sorte que ce cercle fait tout entier partie du domaine D. De même le cercle K' fera tout entier partie du domaine D'. Il en résulte que la ligne L est tout entière dans la portion du plan extérieure à la fois aux deux cercles K et K'. Cela suffit pour démontrer le théorème énoncé.

Toutefois la ligne A_1N ne jouit pas des mêmes propriétés que les tangentes aux lignes ordinaires. On voit aisément en effet, que si l'on joint par une droite BC deux points B et C de la *Punktmenge* P, et que l'on fasse tendre B et C simultanément vers le point A_1, la limite de la droite BC n'est pas en général la tangente A_1N. Considérons en effet deux points B_0 et C_0 de la *Punktmenge* P, choisis de telle sorte que le cercle $A_1B_0C_0$ ne soit pas tangent à A_1N. Considérons les transformés successifs B_1C_1, $B_2C_2, \ldots, B_nC_n$ de B_0C_0 par les puissances positives de S. Quand n croîtra indéfiniment B_n et C_n se rapprocheront de A_1 et l'angle de B_nC_n avec A_1N tendra vers une limite finie. De plus j'ai tout lieu de croire qu'il n'y a pas de tangente aux points de L qui ne font pas partie de P.

Je dis maintenant que la ligne L n'a pas de cercle osculateur. Je dis que si on mène un cercle k tangent en A_1 à la droite A_1N et passant par un point B_1 de L, ce cercle ne tendra pas vers une limite déterminée lorsque le point B_1 se rapprochera du point A_1. Menons en effet deux cercles k' et k'' tangents tous deux en A_1 à la droite A_1N et passant respectivement par deux points B'_0 et B''_0 de la ligne L. Soient $B'_1, B'_2, \ldots, B'_n$ les transformés successifs de B'_0 par les puissances de S. Ils seront tous sur k' et deviendront infiniment rapprochés de A_1 quand n deviendra infini.

Donc si le cercle osculateur existait ce devrait être le cercle k'. Mais ce devrait être en même temps le cercle k''. Donc le cercle osculateur n'existe pas.

J'en ai dit assez, je pense, pour faire comprendre à quel point la ligne L diffère d'une ligne analytique.

§ 9. *Groupes symétriques.*

Considérons un polygone H_0 limité par $n + 1$ arcs de cercle A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$, A_nA_{n+1}, $A_{n+1}A_1$ se coupant en $n + 1$ points A_1, $A_2, \ldots, A_{n+1}$ qui sont les sommets de ce polygone. Construisons les polygones H symétriques de H_0 par rapport à ses divers côtés, puis les polygones symétriques des $n + 1$ polygones H par rapport à leurs divers côtés et ainsi de suite. Si les divers polygones ainsi construits ne se recouvrent pas mutuellement, on aura un groupe kleinéen.

Soit H'_0 le polygone symétrique de H_0 par rapport au côté $A_{n+1}A_1$; le polygone $H_0 + H'_0 = R_0$ sera le polygone générateur du groupe; il admettra $2n$ côtés, à savoir les n côtés A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ de H_0 et les côtés symétriques de H'_0. Deux côtés symétriques seront d'ailleurs conjugués.

La première condition évidemment nécessaire pour que le groupe soit discontinu, c'est que tous les angles A_1, $A_2, \ldots, A_n$, A_{n+1} du polygone H_0 soient nuls ou soient des parties aliquotes de π; ils sont donc tous droits ou aigus.

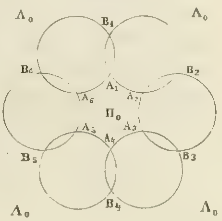
Supposons cette condition remplie et construisons le polyèdre P_0 générateur du groupe. Pour cela construisons les sphères Σ_1, $\Sigma_2, \ldots, \Sigma_{n+1}$ qui ont même centre et même rayon que les arcs de cercle A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n+1}A_1$. Ces sphères limiteront un certain polyèdre K_0. On construira ensuite le polyèdre K'_0 symétrique de K_0 par rapport à la sphère Σ_{n+1}. Le polyèdre $P_0 = K_0 + K'_0$ sera alors le polyèdre générateur du groupe.

Les sphères Σ_{n+1} et Σ_1 se couperont suivant une circonférence C_1 qui coupera le plan des $\xi\eta$ en deux points A_1 et B_1 dont le premier est un sommet de H_0. De même les sphères Σ_{i-1} et Σ_i se couperont suivant une circonférence C_i qui coupera le plan des $\xi\eta$ en deux points A_i et B_i dont le premier est un sommet de H_0.

Cela posé, on peut faire diverses hypothèses.

1° On peut supposer que les sphères Σ n'ont pas d'autre intersection que les circonférences $C_1, C_2, \ldots C_{n+1}$. C'est ce qui arrive par exemple dans le cas de la figure 2. Dans ce cas le polyèdre K_0 admet deux faces de la 2^e sorte H_0 et Λ_0. La face Λ_0 est formée dans le cas de la figure 2 de la portion du plan extérieure au contour polygonal curviligne $B_1 B_2 B_3 \ldots B_{n+1}$. Le polyèdre K_0 admet en outre $n+1$ faces de la 1$^{\text{ère}}$ sorte qui sont les portions des sphères $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{n+1}$, limitées respectivement par les circonférences C_1 et C_2, C_2 et $C_3, \ldots C_{n+1}$ et C_1, et $n+1$ arêtes de la 1$^{\text{ère}}$ sorte qui sont ces circonférences elles-mêmes. Le polyèdre $P_0 = K_0 + K_0'$ admet de même 2 faces de la 2^e sorte, $2n$ faces de la 1$^{\text{ère}}$ sorte et $2n$ arêtes de la 1$^{\text{ère}}$ sorte.

Fig. 2.



Les conditions de discontinuité du groupe sont remplies et nous avons un groupe kleinéen. De plus il est de la 1$^{\text{ère}}$ espèce, car on peut en déformant d'une manière continue le polygone H_0 passer au cas où les côtés de ce polygone sont orthogonaux à une circonférence, c'est à dire au cas des groupes fuchsiens. Le plan est divisé en deux domaines D et D', le premier rempli par le polygone R_0 et ses transformés, le second par le polygone Λ_0 et ses transformés.

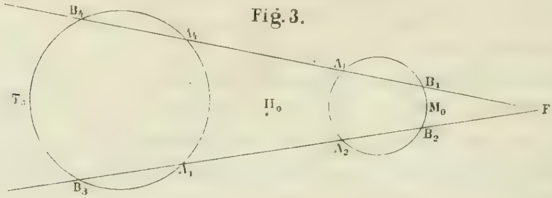
2° On pourrait supposer aussi que les sphères Σ admettent d'autres intersections que les circonférences $C_1, C_2, \ldots C_{n+1}$, qu'elles se coupent par exemple suivant d'autres circonférences $k_1, k_2, \ldots k_p$; mais que ces circonférences restent tout entières extérieures au polyèdre K_0, de telle façon qu'elles ne soient pas des arêtes de ce polyèdre. Mais il est aisé de voir que cette supposition est incompatible avec l'hypothèse que nous avons faite que les angles de H_0 sont tous droits ou aigus.

3° On peut supposer que le polyèdre K_0 admet comme arêtes, outre les circonférences C, une ou plusieurs des circonférences k et que les angles dièdres correspondants ne sont pas des parties aliquotes de π. Il est clair alors que le groupe n'est pas discontinu.

4° Il peut arriver enfin que le polyèdre K_0 admette comme arêtes, outre les circonférences C, une ou plusieurs des circonférences k et que les dièdres correspondants soient des parties aliquotes de π. Dans ce cas le groupe est discontinu, mais on ne peut passer au cas des groupes fuchsiens en déformant le polygone H_0. Le groupe est donc de la 2e espèce.

Prenons comme exemple le cas de la figure 3. Le polygone H_0 est

Fig. 3.



un quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ dont deux côtés opposés A_1A_4 et A_2A_3 sont des lignes droites qui prolongées vont se couper en F. Je suppose de plus que les angles A_1, A_2, A_3, A_4 et F sont des parties aliquotes de π. Le polyèdre K_0 n'admet alors que des dièdres égaux à des parties aliquotes de π. Il a trois faces de la 2e sorte, H_0, M_0 et T_0; il a quatre faces de la 1ère sorte faisant partie respectivement des sphères A_1A_2 et A_3A_4 et des plans A_1A_4 et A_2A_3. Le groupe G considéré est donc discontinu.

Si l'on prend le polyèdre K_0' symétrique de K_0 par rapport à la droite A_2A_3, l'ensemble de ces polyèdres sera P_0 et aura pour faces de la 2e sorte $H_0 + H_0'$, $M_0 + M_0'$ et $T_0 + T_0'$ en appelant H_0', M_0' et T_0' les polygones symétriques de H_0, M_0 et T_0. Le plan des $\xi\eta$ va se trouver divisé en trois domaines D, D' et D'' recouverts respectivement par les transformés de $H_0 + H_0'$, par ceux de $M_0 + M_0'$ et par ceux de $T_0 + T_0'$.

Etudions d'abord le domaine D'. Supposons qu'on construise les triangles symétriques de M_0 par rapport à ses trois côtés, puis les triangles symétriques de ceux-ci par rapport à leurs divers côtés et ainsi de suite. Tous les triangles ainsi construits recouvriront un certain cercle H qui a pour centre F et qui coupe orthogonalement le cercle $A_1A_2B_1B_2$. Ce cercle H sera donc une partie du domaine D', mais une partie seule-

ment. En effet, le cercle H est recouvert par les transformés de $M_0 + M'_0$ par certaines substitutions du groupe G. Ces substitutions s'obtiennent en combinant de toutes les manières possibles les trois inversions par rapport aux cercles FB_1, FB_2 et B_1B_2, de telle façon que le nombre total des substitutions combinées soit pair. Ces substitutions forment un groupe g qui est fuchsien et qui est un sous-groupe du groupe kleinéen G. Pour avoir les autres transformés du quadrilatère $M_0 + M'_0$ et par conséquent les autres parties du domaine D', il faut prendre les symétriques du cercle H par rapport au cercle A_3A_4 et à ses transformés. On obtient ainsi une infinité de cercles $H_1, H_2, \ldots$ dont l'ensemble constitue le domaine D'. Ce domaine n'est donc pas d'une seule pièce.

Il en est de même de D''. En effet on démontrerait de même qu'en construisant les triangles symétriques de T_0 par rapport aux trois côtés de ce triangle, puis les triangles symétriques de ceux-ci par rapport à leurs divers côtés, et ainsi de suite, on obtient tous les transformés de $T_0 + T'_0$ par les substitutions d'un sous-groupe fuchsien g_1 du groupe kleinéen G. Ces transformés recouvrent la portion du plan extérieure à un certain cercle J et cette portion du plan ainsi que l'intérieur des divers cercles $J_1, J_2, \ldots$ symétriques de J par rapport au cercle A_1A_2 et à ses transformés, constituent le domaine D''.

Au contraire le domaine D est d'une seule pièce. Si en effet nous construisons les polygones symétriques de Π_0 par rapport aux côtés de ce quadrilatère, puis les polygones symétriques de ceux-ci par rapport à leurs divers côtés, et ainsi de suite, nous obtenons évidemment tous les transformés de $\Pi_0 + \Pi'_0$ et par conséquent tout le domaine D. Mais la figure ainsi formée par ces polygones que l'on construit successivement à côté les uns des autres est d'une seule pièce. Il en est donc de même de D.

Ce domaine D est d'ailleurs limité par les circonférences H, H_1, $H_2, \ldots$, J, J_1, $J_2, \ldots$; *il n'est donc pas simplement connexe.* Cette circonstance aurait rendu presque impossible la démonstration directe de la discontinuité du groupe et nécessitait l'emploi de l'artifice dont nous avons fait usage.

L'existence de ces domaines limités par un nombre infini de cercles a été signalée pour la première fois par M. Klein.

§ 10. *Première famille.*

Dans le § 11 du Mémoire sur les groupes fuchsiens, nous avons envisagé (page 56) un hexagone $ABCDEF$, dont les côtés AB et CD, CD et DE, EF et FA sont conjugués et dont les angles B, D, F et $A + C + E$ sont des parties aliquotes de 2π. Déformons cet hexagone de façon que ses angles continuent à satisfaire à cette condition, mais que ses côtés ne soient plus orthogonaux à un même cercle fondamental et cherchons à quelle condition il restera le polygone générateur d'un groupe kleinéen.

Considérons donc le groupe engendré par notre hexagone déformé $ABCDEF$. Il sera évidemment dérivé de trois substitutions elliptiques S_1, S_2 et S_3 qui ont respectivement pour points doubles B et B', D et D', F et F' et pour multiplicateurs $e^{i\beta}$, $e^{i\delta}$, $e^{i\varphi}$, β, δ et φ désignant les angles B, D et F.

S_1 change BA en BC
S_2 » DC en DE
S_3 » FE en FA.

La combinaison

$$S_1 S_2 S_3 = S_4$$

est aussi une substitution elliptique qui a pour points doubles A et A' et pour multiplicateur $e^{-i\alpha}$, α désignant l'angle $A + C + E$.

Les combinaisons

$$S_2 S_3 S_1 = S_5 \quad \text{et} \quad S_3 S_1 S_2 = S_6$$

ont aussi pour multiplicateurs $e^{-i\alpha}$ et elles ont respectivement pour points doubles C et C', E et E'.

Voyons maintenant quelles relations doivent avoir lieu entre ces points doubles et ces multiplicateurs.

Soient z_1 le transformé de z par S_1, z_2 celui de z_1 par S_2, z_3 celui de z_2 par S_3; z_3 sera par conséquent le transformé de z par S_4 et nous aurons les relations:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{z_1 - B}{z_1 - B'} &= e^{i\beta}\frac{z - B}{z - B'} \\ \frac{z_2 - D}{z_2 - D'} &= e^{i\delta}\frac{z_1 - D}{z_1 - D'} \\ \frac{z_3 - F}{z_3 - F'} &= e^{i\varphi}\frac{z_2 - F}{z_2 - F'} \\ \frac{z_3 - A}{z_3 - A'} &= e^{-i\alpha}\frac{z - A}{z - A'}. \end{aligned}$$

En différentiant les relations (1), on trouve:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\frac{dz_1}{(z_1 - B')^2} = e^{i\beta}\frac{dz}{(z - B')^2}, &&\frac{dz_1}{(z_1 - B)^2} = e^{-i\beta}\frac{dz}{(z - B)^2} \\ &\frac{dz_2}{(z_2 - D')^2} = e^{i\delta}\frac{dz_1}{(z_1 - D')^2}, &&\frac{dz_2}{(z_2 - D)^2} = e^{-i\delta}\frac{dz_1}{(z_1 - D)^2} \\ &\frac{dz_3}{(z_3 - F')^2} = e^{i\varphi}\frac{dz_2}{(z_2 - F')^2}, &&\frac{dz_3}{(z_3 - F)^2} = e^{-i\varphi}\frac{dz_2}{(z_2 - F)^2} \\ &\frac{dz_3}{(z_3 - A')^2} = e^{-i\alpha}\frac{dz}{(z - A')^2}, &&\frac{dz_3}{(z_3 - A)^2} = e^{i\alpha}\frac{dz}{(z - A)^2}. \end{aligned}$$

Parmi les relations (2) envisageons les trois premières de la seconde colonne et la dernière de la première colonne et faison y, $z = A$ d'où $z_1 = C$, $z_2 = E$, $z_3 = A$; il viendra en combinant les relations ainsi obtenues de manière à éliminer dz, dz_1, dz_2, dz_3:

$$\frac{(A - B)^2(C - D)^2(E - F)^2}{(C - B)^2(E - D)^2(A - F)^2} = e^{i(\alpha - \beta - \delta - \varphi)}$$

ou:

$$(3)\qquad \frac{(A - B)(C - D)(E - F)}{(B - C)(D - E)(F - A)} = \pm\, e^{i\frac{\alpha - \beta - \delta - \varphi}{2}}.$$

Une discussion facile montre que c'est le signe $+$ qui convient.

Dans le cas où les quatre angles α, β, δ et φ sont nuls, c'est à dire dans le cas où la groupe se réduit à la 2[e] famille la relation (3) devient:

$$(A-B)(C-D)(E-F) = (B-C)(D-E)(F-A).$$

Supposons donc qu'on se donne, outre les angles α, β, δ, φ, six points doubles A, B, C, D, E, F de façon à satisfaire à la relation (3). Les trois points doubles B', D' et F' sont alors déterminés par les équations:

$$\frac{C-B}{C-B'} = e^{i\beta}\frac{A-B}{A-B'}, \quad \frac{E-D}{E-D'} = e^{i\delta}\frac{C-D}{C-D'}, \quad \frac{A-F}{A-F'} = e^{i\varphi}\frac{E-F}{E-F'}$$

et les trois points doubles A', C' et E' par les relations:

$$\frac{C'-B}{C'-B'} = e^{i\beta}\frac{A'-B}{A'-B'}, \quad \frac{E'-D}{E'-D'} = e^{i\delta}\frac{C'-D}{C'-D'}, \quad \frac{A'-F}{A'-F'} = e^{i\varphi}\frac{E'-F}{E'-F'}.$$

Il n'arrivera pas en général que les quatre points A, B, A', B' seront sur un même cercle. Il en sera de même des points B, B', C et C'; C, C', D et D' etc. Il résulte de là que si nous construisons le polyèdre P_0 générateur du groupe, la face de la 2[e] sorte de ce polyèdre ne sera pas en général l'hexagone $ABCDEF$, mais un dodécagone, ainsi qu'on va le voir:

Voici en effet comment on peut construire le polyèdre P_0.

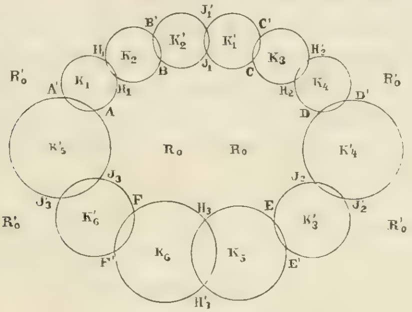
Considérons 6 cercles K_1, K_2, ... K_6 passant respectivement par A et A', par B et B', par C et C', par D et D', par E et E', par F et F'. Les deux premiers se couperont en H_1 et H_1', les deux suivants en H_2 et H_2', les deux derniers en H_3 et H_3'. Soient maintenant K_1' et K_2' les transformés de K_1 et K_2 par S_1; ils passeront, le premier par C et C', le second par B et B' et ils se couperont en J_1 et J_1'.

Soient de même K_3' et K_4' les transformés de K_3 et de K_4 par S_2; K_5' et K_6' les transformés de K_5 et de K_6 par S_3. Ces quatre cercles passeront respectivement par E et E', par D et D', par A et A', par F et F' et ils se couperont les deux premiers en J_2 et J_2', les deux derniers en J_3 et J_3'.

Je suppose que ces différents cercles n'aient pas d'autre point d'intersection que ceux que je viens d'énumérer et que la position relative de ces divers cercles et points soit celle qui est indiquée par la figure 4.

Dans ce cas construisons les sphères Σ_i et Σ'_i qui ont même centre et même rayon que les cercles K_i et K'_i. Puis envisageons le polyèdre P_0 formé par la portion du plan extérieure à ces douze sphères. Ce po-

Fig. 4.



lyèdre aura deux faces de la 2e sorte, R_0 et R'_0 qui seront respectivement les portions du plan intérieure et extérieure à l'anneau formé par les douze cercles K_i et K'_i; il aura douze faces de la 1ère sorte formées par des portions des sphères Σ_i et Σ'_i; ces douze faces seront conjuguées deux à deux de telle façon que la face Σ'_i soit conjuguée de Σ_i. Le polyèdre P_0 admettra douze arêtes de la première sorte formées par les intersections deux à deux des sphères Σ_i et Σ'_i; ces arêtes se répartiront en 7 cycles ainsi que l'indique le tableau suivant.

Numéro du cycle	Arêtes faisant partie du cycle	Somme des dièdres du cycle
1	AA', CC' et EE'	α
2	BB'	β
3	DD'	δ
4	FF'	φ
5	$H_1H'_1$ et $J_1J'_1$	2π
6	$H_2H'_2$ et $J_2J'_2$	2π
7	$H_3H'_3$ et $J_3J'_3$	2π

Aux quatre premiers cycles correspondent les substitutions elliptiques S_4, S_1, S_2 et S_3; aux trois derniers la substitution identique. Si donc

les cercles K_i et K'_i sont dans la situation relative indiquée par la figure 4, le groupe considéré, dont le polyèdre générateur sera P_0, sera discontinu.

Notre groupe sera donc kleinéen, pourvu que les points doubles A, B, C, D, E, F satisfassent non-seulement à la relation (3) mais à des inégalités exprimant que les douze cercles K_i et K'_i sont dans la situation relative indiquée par la figure 4.

Le plan se trouve partagé en deux domaines limités par une ligne L. Voici comment on peut trouver la génération de la ligne L: on considère l'ensemble des points doubles de toutes les substitutions hyperboliques ou loxodromiques du groupe. Ces points doubles forment une *Punktmenge* P; si on y adjoint son *erste Ableitung* P', on aura la ligne L.

§ 11. *Fonctions kleinéennes.*

Soit G un groupe kleinéen quelconque et soient

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

les diverses substitutions de ce groupe. Formons comme dans la théorie des fonctions fuchsiennes la série suivante:

$$\theta(z) = \sum H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} \tag{1}$$

l'algorithme $H(z)$ représentant une fonction rationnelle de z dont aucun infini ne se confond avec un point singulier du groupe, et m désignant un entier plus grand que 1.

Cette série est convergente. Dans le § 1 du Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, nous avons donné deux démonstrations de la convergence de cette série. La première de ces démonstrations subsiste dans le cas qui nous occupe; il n'en serait pas de même de la seconde.

A tout groupe kleinéen correspondent donc une infinité de fonctions thétakleinéennes $\theta(z)$ et de fonctions kleinéennes $F(z)$ jouissant des propriétés

$$\Theta\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = \Theta(z)(\gamma_i z + \delta_i)^{2m}$$

$$F\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = F(z).$$

Ces fonctions jouissent des mêmes propriétés que les fonctions fuchsiennes et thétafuchsiennes. Par conséquent toutes les fonctions kleinéennes s'expriment rationnellement à l'aide de deux d'entre elles, x et y, entre lesquelles il y a une relation algébrique

$$f(x, y) = 0 \tag{2}$$

dont le genre est égal à celui du groupe G. Quand ce genre est nul, toutes les fonctions kleinéennes s'expriment rationnellement à l'aide de l'une d'entre elles que j'appelle x.

Si je pose:

$$v_1 = \sqrt{\frac{dz}{dx}}, \qquad v_2 = z\sqrt{\frac{dz}{dx}}$$

v_1 et v_2 sont deux intégrales de l'équation linéaire:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v \tag{3}$$

qui se réduit à

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x)v \tag{3'}$$

dans le cas où le genre est nul (Cf § 4 du Mémoire sur les fonctions fuchsiennes); dans ces équations φ désigne une fonction rationnelle.

Examinons quelques cas particuliers, et d'abord reprenons l'équation (3′) des paragraphes 5 et 7 du Mémoire sur les fonctions fuchsiennes:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{P(x)}{Q^2(x)}v$$

où

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n).$$

Le polynôme $P(x)$ est de degré $2n - 2$ et je suppose qu'il satisfait aux $n + 1$ conditions suivantes

$$
(4) \quad \begin{gathered}
P(a_i) = - Q'^2(a_i)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\beta_i^2}\right) \\
\text{coefficient de } x^{2n-2} \text{ dans } P(x) = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\beta_{n+1}^2}\right).
\end{gathered}
$$

Les nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n+1}$ sont des entiers positifs qui peuvent devenir infinis.

Nous avons vu que si le polynôme $P(x)$ (outre les $n + 1$ conditions (4) qui sont *complexes* et qui par conséquent équivalent à $2n + 2$ conditions réelles) satisfait à $2n - 4$ autres conditions réelles et transcendantes, la variable x est une fonction fuchsienne du rapport des intégrales.

Il résulte de la théorie précédente que si le polynôme $P(x)$ satisfait non seulement aux conditions (4), mais à certaines *inégalités,* la variable x sera une fonction kleinéenne du rapport des intégrales. Supposons en effet les conditions (4) remplies; appelons z le rapport des intégrales de l'équation (3); quand x reviendra à sa valeur initiale, après avoir décrit un contour fermé C_i, z se changera en $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ et les substitutions

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

formeront un groupe G.

Si ce groupe est kleinéen, x sera une fonction kleinéenne de z. Or ce groupe G, comme on le voit aisément est dérivé de n substitutions elliptiques ou paraboliques $S_1, S_2, \ldots S_n$, ayant respectivement pour multiplicateurs

$$e^{\frac{2i\pi}{\beta_1}}, \quad e^{\frac{2i\pi}{\beta_2}}, \quad e^{\frac{2i\pi}{\beta_3}}, \ldots \quad e^{\frac{2i\pi}{\beta_n}}.$$

La combinaison

$$S_1 S_2 \ldots S_n$$

sera aussi une substitution elliptique ou parabolique qui aura pour multiplicateur:

$$e^{\frac{2i\pi}{\beta_{n+1}}}.$$

Or nous avons vu au paragraphe précédent qu'il suffit de certaines

inégalités imposées aux coëfficients d'un pareil groupe G pour qu'il soit discontinu. Il suffira donc aussi d'imposer certaines inégalités aux coëfficients de $P(x)$ pour que x soit fonction uniforme de z.

Reprenons de même l'équation (3) du paragraphe 6 du Mémoire sur les fonctions fuchsiennes

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v, \qquad \psi(x, y) = 0.$$

J'appelle a_i, b_i les points analytiques différents de c_i, d_i et pour lesquels la fonction φ devient infinie. Je suppose que la fonction φ satisfasse aux conditions suivantes:

$$(5) \quad \begin{aligned} &\lim (y - d_i)^2 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \varphi(x, y) = -\frac{3}{4} \qquad (\text{pour } x = c_i, \ y = d_i) \\ &\lim (x - a_i)\varphi(x, y) = \frac{1 - \beta_i^2}{4\beta_i^2} \qquad (\text{pour } x = a_i, \ y = b_i). \end{aligned}$$

Les nombres β_i sont encore ici des entiers positifs qui peuvent devenir infinis.

Nous avons vu que si la fonction φ satisfait en outre à certaines conditions transcendantes, x est fonction fuchsienne du rapport z des variables. De même si cette fonction φ satisfait non seulement aux équations (5) mais à certaines inégalités, x sera fonction kleinéenne de z. La démonstration serait tout à fait analogue à celle qui précède.

Ainsi pour que dans l'équation (3) x exprimé en fonction de z soit une fonction kleinéenne de la 1ère, de la 2e, ou de la 6e familles, il suffit de certaines *égalités algébriques* et de certaines *inégalités.* Nous n'avons pas à nous imposer *d'égalité transcendante.* Il n'en est pas de même pour les fonctions des autres familles. Si nous voulons par exemple que dans l'équation (3) x soit fonction kleinéenne de la 3ème famille du rapport z des intégrales, il faudra nous imposer certaines égalités transcendantes.

Reprenons en effet l'équation (3) du paragraphe 8 du Mémoire sur les fonctions fuchsiennes

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v, \qquad \psi(x, y) = 0$$

en supposant que la fonction φ satisfait aux conditions énoncées à la page 278 de ce paragraphe (lignes 30 et suivantes). Soit n le genre de la relation $\psi = 0$; le groupe kleinéen de notre équation (3) devra être de genre n et dépendra par conséquent de $3n - 3$ paramètres complexes; c'est à dire précisément d'autant de paramètres qu'il y a de modules dans la relation $\psi = 0$. Quand on se donnera cette relation $\psi = 0$, le groupe kleinéen sera donc entièrement déterminé; il en sera donc de même de la fonction φ. Il résulte de là que cette fonction est assujettie, indépendamment des conditions algébriques de la page 278 du Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, à n conditions transcendantes, puisque ces conditions algébriques ne suffiraient pas pour la déterminer.

§ 12. *Historique.*

C'est M. Schottky qui a le premier remarqué la discontinuité de certains groupes kleinéens (Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd 83, page 346), à savoir des groupes symétriques de la 3ème famille. Depuis, M. Klein a approfondi la théorie de ces groupes dans diverses notes insérées aux Mathematische Annalen (Tomes XIX, XX et XXI) et dans un mémoire plus étendu inséré dans le XXIe volume de ces mêmes annales et intitulé: Ueber Riemannsche Functionentheorie.

J'avais moi-même dans deux notes que j'eus l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences de Paris le 27 Juin et le 11 Juillet 1881 (voir Comptes Rendus, Tomes 92 et 93) énoncé succinctement la plupart des résultats exposés dans le présent mémoire.

Paris 19 Mai 1883.

SUR LA TRANSFORMATION
DES
FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

MARTIN KRAUSE

à ROSTOCK.

Soit n un nombre positif impair pris à volonté, puis

$$\begin{vmatrix} t & o \\ \xi & t' \end{vmatrix}$$

un représentant pris à volonté appartenant à la transformation de $n^{\text{ème}}$ degré, on a, comme on sait, les équations:

$$(1)\quad \begin{aligned}
\vartheta(v', \tau')_0 &= x_1\vartheta(v)_0^n + x_2\vartheta(v)_0^{n-2}\vartheta(v)_1^2 + \ldots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta(v)_0\vartheta(v)_1^{n-1} \\
\vartheta(v', \tau')_2 &= x_1\vartheta(v)_2^n + x_2\vartheta(v)_2^{n-2}\vartheta(v)_3^2 + \ldots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta(v)_2\vartheta(v)_3^{n-1} \\
\vartheta(v', \tau')_3 &= x_1\vartheta(v)_3^n + x_2\vartheta(v)_3^{n-2}\vartheta(v)_2^2 + \ldots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta(v)_3\vartheta(v)_2^{n-1} \\
(-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta(v', \tau')_1 &= x_1\vartheta(v)_1^n + x_2\vartheta(v)_1^{n-2}\vartheta(v)_0^2 + \ldots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta(v)_1\vartheta(v)_0^{n-1}.
\end{aligned}$$

Dans ces équations:

$$v' = tv, \qquad \tau' = \frac{t\tau - \xi}{t'};$$

et les grandeurs $x_1,\ x_2, \ldots x_{\frac{n+1}{2}}$ sont des constantes qui seront déterminées dans la suite.

Ces équations peuvent se mettre sous la forme:

$$\frac{\vartheta(v',\ \tau')_0}{\vartheta(v)_0^n} = x_1 + x_2 \frac{\vartheta(v)_1^2}{\vartheta(v)_0^2} + \ldots + x_{\frac{n+1}{2}} \frac{\vartheta(v)_1^{n-1}}{\vartheta(v)_0^{n-1}}$$

$$\frac{\vartheta(v',\ \tau')_2}{\vartheta(v',\ \tau')_0} \cdot \frac{\vartheta(v',\ \tau')_0}{\vartheta(v)_0^n} = x_1 \frac{\vartheta(v)_2^n}{\vartheta(v)_0^n} + x_2 \frac{\vartheta(v)_2^{n-2}\vartheta(v)_3^2}{\vartheta(v)_0^n} + \ldots + x_{\frac{n+1}{2}} \frac{\vartheta(v)_2\vartheta(v)_3^{n-1}}{\vartheta(v)_0^n}$$

(2)

$$\frac{\vartheta(v',\ \tau')_3}{\vartheta(v',\ \tau')_0} \cdot \frac{\vartheta(v',\ \tau')_0}{\vartheta(v)_0^n} = x_1 \frac{\vartheta(v)_3^n}{\vartheta(v)_0^n} + x_2 \frac{\vartheta(v)_3^{n-2}\vartheta(v)_2^2}{\vartheta(v)_0^n} + \ldots + x_{\frac{n+1}{2}} \frac{\vartheta(v)_3\vartheta(v)_2^{n-1}}{\vartheta(v)_0^n}.$$

$$(-1)^{\frac{t-1}{2}} \frac{\vartheta(v',\ \tau')_1}{\vartheta(v',\ \tau')_0} \cdot \frac{\vartheta(v',\ \tau')_0}{\vartheta(v)_0^n} = x_1 \frac{\vartheta(v)_1^n}{\vartheta(v)_0^n} + x_2 \frac{\vartheta(v)_1^{n-2}}{\vartheta(v)_0^{n-2}} + \ldots + x_{\frac{n+1}{2}} \frac{\vartheta(v)_1}{\vartheta(v)_0}.$$

Alors, si on a les rapports:

$$O_\alpha = \vartheta(o,\ \tau')_\alpha, \qquad k = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}, \qquad k' = \frac{o_2^2}{o_3^2},$$

$$u' = \pi O_3^2 v' = \pi t O_3^2 v = t\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2} u = Mu$$

on aura:

$$\frac{\vartheta(v)_1}{\vartheta(v)_0} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} \operatorname{sn}(u,\ k), \qquad \frac{\vartheta(v)_2}{\vartheta(v)_0} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_0} \operatorname{cn}(u,\ k), \qquad \frac{\vartheta(v)_3}{\vartheta(v)_0} = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_0} \operatorname{dn}(u,\ k),$$

$$\frac{\vartheta(v',\ \tau')_1}{\vartheta(v',\ \tau')_0} = \frac{O_2}{O_3} \operatorname{sn}(u',\ k'), \qquad \frac{\vartheta(v',\ \tau')_2}{\vartheta(v',\ \tau')_0} = \frac{O_2}{O_0} \operatorname{cn}(u',\ k'), \qquad \frac{\vartheta(v',\ \tau')_3}{\vartheta(v',\ \tau')_0} = \frac{O_3}{O_0} \operatorname{dn}(u',\ k').$$

On obtient par conséquent les équations

$$(3)\quad \begin{aligned}
&\vartheta_3^n \frac{\vartheta(v', \tau')_0}{\vartheta(v)_0^n} = x_1\vartheta_3^n + x_2\vartheta_3^{n-2}\vartheta_2^2 \operatorname{sn}^2(u, k) + \dots x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_3\vartheta_2^{n-1}\operatorname{sn}^{n-1}(u, k),\\
&\frac{O_2\vartheta_0^n}{O_0}\operatorname{cn}(u', k')\frac{\vartheta(v', \tau')_0}{\vartheta(v)_0^n} = x_1\vartheta_2^n\operatorname{cn}^n(u, k) + x_2\vartheta_2^{n-2}\vartheta_3^2\operatorname{cn}^{n-2}(u, k)\operatorname{dn}^2(u, k) + \dots\\
&\qquad + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2\vartheta_3^{n-1}\operatorname{cn}(u, k)\operatorname{dn}^{n-1}(u, k),\\
&\frac{O_3\vartheta_0^n}{O_0}\operatorname{dn}(u', k')\frac{\vartheta(v', \tau')_0}{\vartheta(v)_0^n} = x_1\vartheta_3^n\operatorname{dn}^n(u, k) + x_2\vartheta_3^{n-2}\vartheta_2^2\operatorname{dn}^{n-2}(u, k)\operatorname{cn}^2(u, k) + \dots\\
&\qquad + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_3\vartheta_2^{n-1}\operatorname{dn}(u, k)\operatorname{cn}^{n-1}(u, k),\\
&(-1)^{\frac{t-1}{2}}\frac{O_2\vartheta_3^n}{O_3}\operatorname{sn}(u', k')\frac{\vartheta(v', \tau')_0}{\vartheta(v)_0^n} = x_1\vartheta_2^n\operatorname{sn}^n(u, k) + x_2\vartheta_2^{n-2}\vartheta_3^2\operatorname{sn}^{n-2}(u, k) + \dots\\
&\qquad + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2\vartheta_3^{n-1}\operatorname{sn}(u, k).
\end{aligned}$$

De ces équations on tire les trois suivantes:

$$\begin{aligned}
&x_1\left(\vartheta_2^n\operatorname{cn}^n(u, k) - \frac{O_2 . \vartheta_0^n}{O_0}\operatorname{cn}(u', k')\right) + \dots\\
&+ x_{\frac{n+1}{2}}\left(\vartheta_2\vartheta_3^{n-1}\operatorname{cn}(u, k)\operatorname{dn}^{n-1}(u, k) - \frac{O_2 . \vartheta_0^n . \vartheta_2^{n-1}}{O_0\vartheta_3^{n-1}}\operatorname{cn}(u', k') . \operatorname{sn}^{n-1}(u, k)\right) = 0,
\end{aligned}$$

$$(4)\quad \begin{aligned}
&x_1\left(\vartheta_3^n\operatorname{dn}^n(u, k) - \frac{O_3\vartheta_0^n}{O_0}\operatorname{dn}(u', k')\right) + \dots\\
&+ x_{\frac{n+1}{2}}\left(\vartheta_3\vartheta_2^{n-1}\operatorname{dn}(u, k)\operatorname{cn}^{n-1}(u, k) - \frac{O_3 . \vartheta_0^n\vartheta_2^{n-1}}{O_0 . \vartheta_3^{n-1}}\operatorname{dn}(u', k') . \operatorname{sn}^{n-1}(u, k)\right) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x_1\left(\vartheta_2^n\operatorname{sn}^n(u, k) - \frac{(-1)^{\frac{t-1}{2}} O_2 . \vartheta_3^n}{O_3}\operatorname{sn}(u', k')\right) + \dots\\
&+ x_{\frac{n+1}{2}}\left(\vartheta_2\vartheta_3^{n-1}\operatorname{sn}(u, k) - \frac{(-1)^{\frac{t-1}{2}} O_2 . \vartheta_3\vartheta_2^{n-1}}{O_3}\operatorname{sn}(u', k') . \operatorname{sn}^{n-1}(u, k)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Représentons-nous maintenant, dans les deux derniers systèmes d'équations, les fonctions $\operatorname{sn}^e(u, k)$, $\operatorname{cn}^e(u, k)$, $\operatorname{dn}^e(u, k)$, développées d'après les puissances de u, comme M. HERMITE, D. ANDRÉE et d'autres en ont donné l'exemple. Les coefficients sont des fonctions rationnelles connues des grandeurs ϑ_a. Représentons-nous de même les fonctions $\operatorname{sn}(u', k')$,

cn(u', k'), dn(u', k') et leurs produits avec $\mathrm{sn}^e(u, k)$, développés d'après les puissances de u. Les coefficients sont des fonctions rationnelles connues des grandeurs ϑ_a et O_a.

Soit enfin:

$$\frac{\vartheta(v', \tau')_0}{\vartheta(v)_0^n} = \eta_0 + \eta_2 u^2 + \eta_4 u^4 + \ldots$$

où il faut considérer les grandeurs $\eta_2, \eta_4, \ldots$ comme inconnues.

Représentons-nous ces développements introduits dans les équations (3) et (4) et les coefficients de $u^0, u^1, \ldots u^{2r+1}$ également placés à droite et à gauche; le système d'équations (3) donnera lieu, en somme, à $4r$ équations linéaires à $\frac{n+1}{2} + r - 1$ inconnues $x_1, x_2, \ldots x_{\frac{n+1}{2}}, \eta_2, \ldots \eta_{2r}$, et le système d'équations (4), à $3r$ équations linéaires à $\frac{n+1}{2}$ inconnues $x_1, x_2, \ldots x_{\frac{n+1}{2}}$.

Quand r augmentera, les constantes $x_1, \ldots x_{\frac{n+1}{2}}$ pourront être exprimées d'une manière rationnelle par les grandeurs ϑ_a et O_a d'autant de manières que l'on voudra. On trouve en même temps autant de rapports rationnels que l'on veut entre les grandeurs ϑ_a et O_a elles-mêmes.

On peut encore multiplier ces rapports en appliquant la transformation supplémentaire et la transformation linéaire.

En combinant avec ce procédé de détermination des constantes le procédé ordinaire, au moyen duquel les constantes ou du moins leurs quotients sont exprimés par les grandeurs

$$\vartheta\left(\frac{m + m_1\tau}{n}\right)_a,$$

on obtient facilement des rapports pour les valeurs partielles des fonctions théta, comme Gauss, Jacobi, Schroeter et d'autres en ont découverts.

Dans les cas les plus simples la méthode conduit vite au résultat. Posons $r = 0$, nous avons la détermination des constantes pour $n = 3, 5, 7$; de plus on obtient pour $n = 3$ et $n = 5$ des rapports entre ϑ_a et O_a; si on pose $r = 1$, on obtient en outre la détermination des constantes pour $n = 9, 11, 13$, et des rapports modulaires pour la transformation du 9ème et du 11ème degré, etc. Dans des circonstances de ce genre cette méthode se recommenderait avant tout pour l'application pratique.

UNE QUESTION DE RENTES VIAGÈRES

PAR

L. LINDELÖF

À HELSINGFORS.

Dans la première livraison des Acta mathematica M. MALMSTEN vient de publier un article intéressant sur la théorie des rentes viagères, ayant pour objet de déterminer la valeur d'une pension annuelle de 1 fr. assurée à un groupe donné de n personnes, tant que v, au moins, d'entre elles restent en vie.

Ayant eu occasion, dans une recherche statistique récemment terminée sur l'état d'une caisse de pension finlandaise,(1) de m'occuper d'une question analogue, j'ai été amené à l'envisager à un point de vue un peu plus général; et comme le résultat de cet examen n'est peut-être pas sans intérêt, je demande la permission de l'exposer ici en peu de mots.

Le problème généralisé que nous avons en vue, peut s'énoncer dans les termes suivants:

Trouver la valeur annuelle d'une rente viagère, payable à la fin de chaque année à un groupe donné de n personnes à telles conditions, que la somme à payer chaque fois, au lieu d'être constante, dépende du nombre des survivants et qu'elle soit fixée respectivement à r_n, r_{n-1}, r_{n-2}, ... r_1 fr. pour les périodes de temps successives où le groupe donné sera réduit à n, $n-1$, $n-2$, ... 1 personnes en vie.

(1) Statistiska beräkningar angående finska civilstatens enke- och pupillkassa, Helsingfors 1882. (Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Tom. XIII.)

Soient x_1, x_2, ... x_n les âges actuels des n personnes. Suivant l'usage des actuaires anglais nous désignons par a_x, a_{xy}, a_{xyz}, ... la valeur d'une annuité ($= 1$) sur une, deux, trois, ... têtes, x, y, z, ... étant les âges respectifs. Le groupe primitif donnant lieu à

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p} = \binom{n}{p}$$

combinaisons distinctes de p têtes, nous désignons de plus par S_p la somme des valeurs des annuités relatives à toutes ces combinaisons, en sorte que

$$S_1 = a_{x_1} + a_{x_2} + \ldots + a_{x_n}$$

$$S_2 = a_{x_1x_2} + a_{x_1x_3} + a_{x_2x_3} + \ldots$$

et ainsi de suite. Les âges x_1, x_2, ... x_n étant donnés, on peut calculer, suivant des règles connues, les valeurs des annuités a et par suite des sommes S. En supposant qu'on ait ainsi évalué les quantités S_1, S_2, ... S_n, la valeur actuelle V de la rente viagère dont il s'agit, peut s'exprimer au moyen d'elles par une équation, dont la forme générale résulte des considérations suivantes.

Imaginons-nous une telle convention faite avec les n personnes que chacune d'elles reçoive séparement une annuité viagère ρ_1, et qu'en outre une annuité ρ_2 soit assurée à chaque combinaison de deux têtes durant son existence, une annuité ρ_3 à chaque combinaison de trois têtes, et ainsi de suite jusqu'à la combinaison unique de n têtes à laquelle on aura de même assuré une annuité ρ_n, les quantités ρ pouvant du reste être positives ou négatives, suivant qu'il s'agit réellement de sommes à payer aux assurés ou à retrancher. Il est évident que les n inconnues ρ_1, ρ_2, ... ρ_n pourront être déterminées de manière que la somme annuelle à payer ainsi pendant chacune des n périodes successives s'accorde exactement avec la rente viagère précédemment stipulée, dont la valeur actuelle, dès lors, sera

$$V = \rho_1 S_1 + \rho_2 S_2 + \rho_3 S_3 + \ldots + \rho_n S_n. \tag{1}$$

Il est facile d'établir les équations de condition auxquelles les inconnues ρ doivent satisfaire. Considérons, par exemple, la $m^{\text{ième}}$ période à partir de la fin, c. à. d. celle où le nombre des survivants est réduit à m per-

sonnes. Comme avec ce nombre on peut former $\binom{m}{2}$ combinaisons de deux têtes, $\binom{m}{3}$ combinaisons de trois têtes etc., la somme annuelle à payer à l'ensemble de toutes ces combinaisons durant la période dont il s'agit, sera

$$r_m = m\rho_1 + \binom{m}{2}\rho_2 + \binom{m}{3}\rho_3 + \ldots + \binom{m}{m}\rho_m$$

Faisant successivement $m = 1, 2, 3, \ldots n$, on obtient le système suivant d'équations

$$(2)\qquad \left|\begin{array}{l} r_1 = \rho_1 \\ r_2 = 2\rho_1 + \rho_2 \\ r_3 = 3\rho_1 + 3\rho_2 + \rho_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_n = n\rho_1 + \binom{n}{2}\rho_2 + \binom{n}{3}\rho_3 + \ldots + \rho_n \end{array}\right.$$

Pour tirer de ces équations la valeur d'une inconnue quelconque ρ_m, il suffit d'ajouter les m premières d'entre elles, après les avoir multipliées respectivement par les nombres binomiaux

$$\binom{m}{1},\ \binom{m}{2},\ \ldots \binom{m}{m},$$

pris alternativement avec les signes $+$ et $-$. En effet, dans le résultat de cette opération l'inconnue ρ_p $(p < m)$ sera, au signe près, affectée du coefficient

$$\binom{m}{p} - \binom{m}{1}\binom{m-1}{p} + \binom{m}{2}\binom{m-2}{p} - \ldots \pm \binom{m}{m-p}\binom{p}{p},$$

lequel, à cause de l'identité

$$\binom{m}{q}\binom{m-q}{p} = \binom{m}{p}\binom{m-p}{q},$$

peut être mis sous la forme

$$\binom{m}{p}\left\{1 - \binom{m-p}{1} + \binom{m-p}{2} - \ldots \pm 1\right\} = \binom{m}{p}(1-1)^{m-p}$$

et, par conséquent, s'évanouit identiquement. On aura donc

$$(3) \qquad \rho_m = r_m - \binom{m}{1} r_{m-1} + \binom{m}{2} r_{m-2} - \ldots \pm \binom{m}{m-1} r_1$$

ou bien, en faisant successivement $m = 1, 2, 3, \ldots n$,

$$(4) \qquad \left| \begin{array}{l} \rho_1 = r_1 \\ \rho_2 = r_2 - 2r_1 \\ \rho_3 = r_3 - 3r_2 + 3r_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \rho_n = r_n - \binom{n}{1} r_{n-1} + \binom{n}{2} r_{n-2} - \ldots \pm nr_1 \end{array} \right.$$

Les coefficients de l'équation fondamentale (1) étant déterminés, notre problème se trouve ainsi complètement résolu.

Dans le cas particulier traité par M. Malmsten on a

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_{v-1} = 0 \quad \text{et} \quad r_v = r_{v+1} = \ldots = r_n = 1,$$

ce qui donne d'abord

$$\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_{v-1} = 0 \quad \text{et} \quad \rho_v = 1.$$

Pour $m > v$, la formule (3) devient, dans ce cas,

$$\rho_m = 1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \ldots \pm \binom{m}{m-v} = (-1)^{m-v} \binom{m-1}{m-v}$$

et l'on obtient pour la valeur actuelle de la rente viagère l'expression suivante

$$V = S_v - vS_{v+1} + \frac{v(v+1)}{1 \cdot 2} S_{v+2} - \ldots \pm \frac{v(v+1)\ldots(n-1)}{1 \cdot 2 \ldots (n-v)} S_n,$$

qui s'accorde, sauf la notation, avec le résultat de M. Malmsten.

Dans les règlements des caisses de secours il est souvent stipulé que la rente viagère ou pension, assurée à une famille, constitue une annuité fixe ($= 1$) tant que deux ou plusieurs membres de la famille restent en vie, mais qu'elle se réduise à une certaine fraction θ de cette annuité

pour le dernier survivant. Les coefficients ρ seront alors déterminés par la formule

$$\rho_m = 1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \ldots \pm \binom{m}{m-1}\theta = (-1)^m(m - 1 - m\theta)$$

et l'on aura

$$V = \theta S_1 + (1 - 2\theta)S_2 - (2 - 3\theta)S_3 + (3 - 4\theta)S_4 - \ldots \pm (n - 1 - n\theta)S_n \,.$$

Si l'on suppose en particulier $\theta = \frac{2}{3}$, il vient

$$\rho_m = (-1)^m \cdot \frac{m-3}{3}$$

et par suite

$$V = \frac{2}{3} S_1 - \frac{1}{3} S_2 \pm 0 \cdot S_3 + \frac{1}{3} S_4 - \frac{2}{3} S_5 + \ldots \pm \frac{n-3}{3} S_n \,.$$

C'est la formule d'après laquelle nous avons en effet, dans le travail cité plus haut, calculé la table XXII, donnant pour différentes combinaisons d'âges les valeurs d'une pension assurée à une famille de 2, 3, … 8 enfants.

Dans le même travail nous avions encore à traiter un cas où la pension dépendait non seulement du nombre des survivants, mais en certaine mesure aussi de la vie d'une personne particulière (la veuve) désignée d'avance. Ce cas pourrait donner lieu à une généralisation ultérieure de notre problème, mais dont la discussion excède les limites de la présente communication.

EINE VERALLGEMEINERUNG DER GLEICHUNG

$$\Gamma(1 + x)\Gamma(1 - x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}.$$

Aus einem Brief an Herrn G. Mittag-Leffler

VON

HJALMAR MELLIN
IN HELSINGFORS.

Diejenige Eigenschaft der Gammafunction, welche durch die Gleichung

$$\Gamma(1 + x)\Gamma(1 - x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}$$

ausgedrückt wird, kann offenbar auch so angegeben werden, dass

$$\frac{1}{\Gamma(1 - \rho_1 x)\Gamma(1 - \rho_2 x)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

ist, wenn ρ_1, ρ_2 die zwei Wurzeln der Gleichung

$$\rho^2 = 1,$$

bezeichnen. Dieser Satz ist nur ein Specialfall des folgenden. Sind $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ die ν Wurzeln der Gleichung

$$\rho^\nu = 1$$

so ist

$$\frac{1}{\Gamma(1 - \rho_1 x)\Gamma(1 - \rho_2 x)\ldots\Gamma(1 - \rho_\nu x)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^\nu}{n^\nu}\right).$$

Diese Gleichung ist wieder ein Specialfall der folgenden

$$\frac{\Gamma^\nu(z)}{\Gamma(z-\rho_1 x)\Gamma(z-\rho_2 x)\ldots\Gamma(z-\rho_\nu x)}=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{x^\nu}{(z+n)^\nu}\right),$$

wo $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ die obige Bedeutung haben.

Sie ergiebt sich auf folgende Weise. Aus den Gleichungen

$$\Gamma(x)=\frac{e^{-Cx}}{x\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}},\quad (C=0{,}577\ldots)$$

$$\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_\nu=0$$

folgt zunächst

$$\frac{\Gamma^\nu(z)}{\Gamma(z-\rho_1 x)\Gamma(z-\rho_2 x)\cdots\Gamma(z-\rho_\nu x)}=$$

$$\frac{(z-\rho_1 x)(z-\rho_2 x)\cdots(z-\rho_\nu x)\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}-\rho_1\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{z}{n}-\rho_2\frac{x}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}-\rho_\nu\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{\nu z}{n}}}{z^\nu\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^\nu e^{-\frac{\nu z}{n}}}.$$

Weil ferner

$$(z-\rho_1 x)(z-\rho_2 x)\cdots(z-\rho_\nu x)=z^\nu-x^\nu,$$

$$\left(1+\frac{z}{n}-\rho_1\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{z}{n}-\rho_2\frac{x}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}-\rho_\nu\frac{x}{n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{z}{n}\right)^\nu-\frac{x^\nu}{n^\nu}=\left(1+\frac{z}{n}\right)^\nu\left(1-\frac{x^\nu}{(z+n)^\nu}\right),$$

so sieht man dass

$$\frac{\Gamma^\nu(z)}{\Gamma(z-\rho_1 x)\Gamma(z-\rho_2 x)\cdots\Gamma(z-\rho_\nu x)}=\frac{(z^\nu-x^\nu)\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^\nu}{(z+n)^\nu}\right)\left(1+\frac{z}{n}\right)^\nu e^{-\frac{\nu z}{n}}}{z^\nu\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^\nu e^{-\frac{\nu z}{n}}}$$

$$=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{x^\nu}{(z+n)^\nu}\right).$$

Bedenkt man, wie die Nullstellen der Function

$$F(x) = x^{\mu} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^{\nu}}{n^{\nu}} \right)$$

in der x-Ebene vertheilt sind, so sieht man leicht ein, dass dieselbe nicht periodisch sein kann, wie auch die ganze Zahl μ gewählt werden mag, wenn $\nu > 2$ ist. Ist $\mu = 1$, $\nu = 2$, so ist

$$F(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi} = \frac{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}{2\pi i}.$$

Da i und $-i$ die Wurzeln der Gleichung

$$r^2 = -1$$

sind, so fragt es sich, ob es, auch für den Fall $\nu > 2$, möglich sei, die positive ganze Zahl μ und die Constanten $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ so zu bestimmen, dass

$$F(x) = A_1 e^{r_1 \pi x} + A_2 e^{r_2 \pi x} + \cdots + A_\nu e^{r_\nu \pi x}$$

wäre, wo $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ die ν Wurzeln der Gleichung

$$r^{\nu} = -1$$

bedeuten. Die Coefficienten der beständig convergirenden Potenzreihe, in die $F(x)$ entwickelt werden kann, würden sicht leicht ergeben, wenn diese Frage bejaht werden könnte. Es ist aber dies nicht der Fall. Denn man kann beweisen, dass der letzte Ausdruck nicht alle Nullstellen der Function $F(x)$ haben kann. Ist also $\nu > 2$, so ist $F(x)$ nicht ein Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^{\nu} y}{dx^{\nu}} = -\pi^{\nu} y.$$

SUR L'ÉQUATION

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[2\nu\,\frac{k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} + 2\nu_1\,\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} - 2\nu_2\,\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x}\right]\frac{dy}{dx} =$$

$$= \left[\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}(n_3 - \nu_2)(n_3 + \nu_2 + 1) + \frac{\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x}(n_2 - \nu_1)(n_2 + \nu_1 + 1) +\right.$$

$$\left. + \frac{k^2 \operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}(n_1 - \nu)(n_1 + \nu + 1) + k^2 \operatorname{sn}^2 x(n + \nu + \nu_1 + \nu_2)(n - \nu - \nu_1 - \nu_2 + 1) + h\right] y$$

ÉQUATION OÙ ν, ν_1, ν_2, DÉSIGNENT DES NOMBRES QUELCONQUES,

n, n_1, n_2, n_3 DES NOMBRES ENTIERS POSITIFS OU NÉGATIFS,

ET h UNE CONSTANTE ARBITRAIRE.

PREMIER MÉMOIRE

PAR

C^te^ de SPARRE
À LYON.

Ce mémoire a été inspiré par l'étude des beaux travaux de M. Hermite sur l'équation de Lamé. Toutefois les considérations dont je partirai pour obtenir l'intégrale de cette équation sont entièrement différentes de celles dont s'est servi cet illustre géomètre, et elles constituent, je crois, une méthode qui pourrait servir pour intégrer beaucoup d'autres équations différentielles linéaires du second ordre.

Introduction.

A la fin d'une note publiée dans le tome 89 du Journal de Crelle M. Hermite a fait remarquer que l'équation de Lamé est un cas particulier de l'équation suivante:

$$y'' + 2(\nu + 1)\frac{k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} y' = [(n - \nu)(n + \nu + 1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y$$

qui comprend aussi comme cas particulier l'équation étudiée par M. Picard (Comptes rendus, tome 89, page 74)

$$y'' + n\frac{k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} y' + ay = 0$$

lorsqu'on y fait $n = 2(\nu + 1)$.

De plus M. Hermite fait remarquer, dans la note en question, que cette équation n'est pas seule, et qu'il faut y joindre les deux suivantes:

$$y'' + 2(\nu + 1)\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} y' = [(n - \nu)(n + \nu + 1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y$$

$$y'' - 2(\nu + 1)\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} y' = [(n - \nu)(n + \nu + 1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y$$

M. Hermite suppose dans ces trois équations que ν est un nombre entier positif pouvant être nul, et n un entier au moins égal à ν, et il indique que dans ce cas leur intégrale est

$$y = cF(x) + c'F(-x)$$

$F(x)$ étant, comme pour l'équation de Lamé, une fonction doublement périodique de seconde espèce avec le seul pôle $x = iK'$.

D'autre part M. Darboux, dans une communication publiée dans les Comptes rendus à la date du 19 Juin 1882 a fait voir que l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{\mu(\mu + 1)}{\operatorname{sn}^2 x} + \frac{\mu'(\mu' + 1)}{\operatorname{cn}^2 x}\operatorname{dn}^2 x + \frac{\mu''(\mu'' + 1)}{\operatorname{dn}^2 x}k^2 \operatorname{cn}^2 x + n(n + 1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h\right]y$$

qui comprend aussi comme cas particulier l'équation de Lamé a une intégrale uniforme lorsque μ, μ', μ'' et n sont entiers, et que par suite son intégrale en vertu du beau théorème de M. Picard s'exprime par les fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

I.

L'équation

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\left[2\nu\frac{k^2\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x}+2\nu_1\frac{\operatorname{sn}x\operatorname{dn}x}{\operatorname{cn}x}-2\nu_2\frac{\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x}{\operatorname{sn}x}\right]\frac{dy}{dx}=$$

$$=\left[\frac{1}{\operatorname{sn}^2x}(n_3-\nu_2)(n_3+\nu_2+1)+\frac{\operatorname{dn}^2x}{\operatorname{cn}^2x}(n_2-\nu_1)(n_2+\nu_1+1)+\right.$$

$$\left.+\frac{k^2\operatorname{cn}^2x}{\operatorname{dn}^2x}(n_1-\nu)(n_1+\nu+1)+k^2\operatorname{sn}^2x(n+\nu+\nu_1+\nu_2)(n-\nu-\nu_1-\nu_2+1)+h\right]y$$

que j'ai indiquée en commençant, comprend comme cas particuliers, ainsi qu'il est bien facile de le voir, les trois équations de M. Hermite ainsi que celle de M. Darboux.

Nous ferons remarquer de plus que la méthode que nous allons suivre pour arriver à l'intégrale nous permettra de l'obtenir, non seulement lorsque ν, ν_1, ν_2 sont entiers et positifs mais encore lorsque ces constantes sont quelconques.

Nous avons dit que nous supposions que les constantes n, n_1, n_2, n_3 étaient des nombres entiers quelconques positifs ou négatifs, je ferai remarquer de suite que l'on ne nuit pas à la généralité de la question en les supposant tous positifs, car si n par exemple est négatif et égal à $-n'$, n' étant positif, le seul terme en n qui est

$$(n+\nu+\nu_1+\nu_2)(n-\nu-\nu_1-\nu_2+1)$$

devient

$$(-n'+\nu+\nu_1+\nu_2)(-n'-\nu-\nu_1-\nu_2+1)=(n'-\nu-\nu_1-\nu_2)(n'+\nu+\nu_1+\nu_2-1)$$

On voit donc qu'on obtiendra le même résultat en supposant n positif et égal à $n'-1$.

On verrait, bien facilement, qu'il en est de même pour les autres quantités n_1, n_2 et n_3.

Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité de l'équation supposer, ainsi que nous le ferons dans la suite, n, n_1, n_2 et n_3 positifs.

Voici maintenant le procédé que j'emploirai pour arriver à l'intégrale de l'équation (1).

Considérons d'abord l'équation

$$(2) \qquad y'' - \frac{P'}{P} y' = \alpha P^2 y$$

où P désigne une fonction quelconque de x et α une constante également quelconque.

Posons

$$y = e^z$$

Notre équation deviendra

$$z'' + z'^2 - \frac{P'}{P} z' = \alpha P^2$$

et l'on satisfait à cette équation en posant

$$z'^2 = \alpha P^2$$

d'où l'on déduit

$$z' = \sqrt{\alpha} P$$

et par suite

$$\frac{z''}{z'} = \frac{P'}{P}$$

L'intégrale générale de l'équation (2) est donc

$$y = Ae^{\sqrt{\alpha}\int P dx} + Be^{-\sqrt{\alpha}\int P dx}$$

A et B désignant des constantes arbitraires.

Posons maintenant

$$y = uz$$

u désignant une fonction arbitraire de x.

La transformée en z de l'équation (2) sera

$$z'' - \left(\frac{P'}{P} - 2\frac{u'}{u}\right) z' + \left(\frac{u''}{u} - \frac{P'}{P}\frac{u'}{u} - \alpha P^2\right) z = 0$$

et en posant de nouveau

$$V = \frac{P}{u^2}$$

d'où l'on tire

$$\frac{P'}{P} - 2\frac{u'}{u} = \frac{V'}{V}$$

notre équation deviendra

$$(3)\qquad z'' - \frac{V'}{V}z' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{P'^2}{P^2} - D_x\frac{P'}{P} - \frac{1}{2}\frac{V'^2}{V^2} + D_x\frac{V'}{V} + 2aP^2\right]z$$

et d'après ce qui précède l'intégrale générale de l'équation (3) sera

$$z = \frac{y}{u}$$

ou

$$(4)\qquad z = \sqrt{\frac{V}{P}}\left[Ae^{\sqrt{a}\int P dx} + Be^{-\sqrt{a}\int P dx}\right]$$

C'est de l'équation (3) dont nous nous servirons pour trouver l'intégrale de l'équation (1).

Pour cela nous chercherons la partie principale du développement de l'expression

$$(5)\qquad \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{P'^2}{P^2} - D_x\frac{P'}{P} - \frac{1}{2}\frac{V'^2}{V^2} + D_x\frac{V'}{V} + 2aP^2\right]$$

Correspondant:

1° à un zéro ou à un infini de V;

2° à un zéro de P;

3° à un infini simple de P;

4° à un infini multiple de P.

1° Partie principale du développement de l'expression (5) correspondant à un zéro ou à un infini de V.

Soit

$$V = R(\varepsilon^m + s\varepsilon^{m+1} + \ldots.)$$

le développement de V relatif à un zéro ou à un infini d'ordre m; m étant positif si c'est un zéro et négatif si c'est un infini.

On en déduira

$$\frac{V'}{V} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{m + (m+1)s\varepsilon + \dots}{1 + s\varepsilon + \dots}$$

ou

$$\frac{V'}{V} = \frac{m}{\varepsilon} + s + \dots$$

ce qui donne

$$D_x \frac{V'}{V} = -\frac{m}{\varepsilon^2} \qquad \frac{V'^2}{V^2} = \frac{m^2}{\varepsilon^2} + \frac{2ms}{\varepsilon}$$

On a donc pour la partie principale du développement correspondant à un zéro ou à un infini d'ordre m de V

$$-\frac{1}{4}\frac{m}{\varepsilon^2}(2 + m) - \frac{ms}{2\varepsilon}$$

(m étant positif pour un zéro, négatif pour un infini).

2° Partie principale du développement de l'expression (5) correspondant à un zéro de P.

Soit

$$P = N(\varepsilon^n + r\varepsilon^{n+1} + \dots)$$

le développement de P relatif à un zéro d'ordre n de P.

On aura d'une façon toute semblable pour la partie principale du développement de l'expression (5)

$$\frac{1}{4}\frac{n}{\varepsilon^2}(2 + n) + \frac{nr}{2\varepsilon}.$$

3° Partie principale du développement de l'expression (5) correspondant à un infini simple de P.

Soit

$$P = N\left(\frac{1}{\varepsilon} + t\right)$$

le développement correspondant de P, on aura pour la partie principale correspondante du développement de l'expression (5)

$$-\frac{1}{4\varepsilon^2} - \frac{t}{2\varepsilon} + aN^2\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{2t}{\varepsilon}\right)$$

c'est à dire

$$-\left(\frac{1}{4\varepsilon^2}+\frac{t}{2\varepsilon}\right)(1-4\alpha N^2)$$

4° Partie principale du développement de l'expression (5) correspondant à un infini multiple de P.

Soit le développement de P correspondant à un infini d'ordre n

$$P=N\left(\frac{1}{\varepsilon^n}+\frac{t_1}{\varepsilon^{n-1}}+\frac{t_2}{\varepsilon^{n-2}}+\ldots\right)$$

d'où

$$P^2=N^2\left(\frac{1}{\varepsilon^{2n}}+\frac{2t_1}{\varepsilon^{2n-1}}+\frac{t_1^2+2t_2}{\varepsilon^{2n-2}}+\ldots\right)$$

On aura par suite pour la partie principale correspondante du développement de l'expression (5)

$$\frac{n}{4\varepsilon^2}(n-2)-\frac{nt_1}{2\varepsilon}+\alpha N^2\left(\frac{1}{\varepsilon^{2n}}+\frac{2t_1}{\varepsilon^{2n-1}}+\frac{t_1^2+2t_2}{\varepsilon^{2n-2}}+\ldots\right)$$

II.

Ceci posé nous allons comparer l'équation (1) à l'équation (3).

On voit d'abord que l'on doit poser

$$-\frac{V'}{V}=2\nu\frac{k^2\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x}+2\nu_1\frac{\operatorname{sn}x\operatorname{dn}x}{\operatorname{cn}x}-2\nu_2\frac{\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x}{\operatorname{sn}x}$$

d'où l'on déduit

$$V=\operatorname{dn}^{2\nu}x\operatorname{cn}^{2\nu_1}x\operatorname{sn}^{2\nu_2}x \tag{6}$$

Nous remarquerons ensuite que le coefficient de y dans (1) n'ayant que des infinis doubles, P ne pourra admettre que des infinis simples. De plus l'équation (1) ainsi que la valeur (6) de V ne changeant pas lorsque

l'on remplace x par $-x$, nous prendrons pour P une fonction doublement périodique qui ne change pas non plus lorsqu'on remplace x par $-x$. Comme d'ailleurs le coefficient de y dans (1) admet comme infinis 0, K, iK', $K+iK'$, ces quantités qui sont aussi des zéros ou des infinis de V devront être également pour P des zéros ou des infinis.

Si on considère maintenant un infini simple de P, cet infini ne figurera pas dans l'expression (5) si le résidu correspondant satisfait à la relation

$$1-4\alpha N^2=0,$$

α étant une constante arbitraire, il en résulte que l'on pourra prendre pour P des infinis simples quelconques, pourvu que les résidus correspondants soient tous égaux en valeur absolue, car alors par un choix convenable de α on pourra faire en sorte qu'aucun de ces infinis ne figure dans l'expression (5), (c'est ce que nous ferons). Nous prendrons donc pour zéros de P, 0, K, $K+iK'$ et iK'.

Les parties principales des développements du coefficient de y dans l'équation (1) pour ces quatre infinis sont

$$\frac{(n_3-\nu_2)(n_3+\nu_2+1)}{\varepsilon^2}=\frac{n_3(n_3+1)-\nu_2(\nu_2+1)}{\varepsilon^2}$$

$$\frac{(n_2-\nu_1)(n_2+\nu_1+1)}{\varepsilon^2}=\frac{n_2(n_2+1)-\nu_1(\nu_1+1)}{\varepsilon^2}$$

$$\frac{(n_1-\nu)(n_1+\nu+1)}{\varepsilon^2}=\frac{n_1(n_1+1)-\nu(\nu+1)}{\varepsilon^2}$$

$$\frac{(n-\nu-\nu_1-\nu_2+1)(n+\nu+\nu_1+\nu_2)}{\varepsilon^2}=\frac{n(n+1)-(\nu+\nu_1+\nu_2)(\nu+\nu_1+\nu_2-1)}{\varepsilon^2}$$

Comme d'ailleurs les termes provenant de V dans les parties principales des développements de l'expression (5) pour les mêmes infinis sont:

$$-\frac{\nu_2(\nu_2+1)}{\varepsilon^2},\qquad -\frac{\nu_1(\nu_1+1)}{\varepsilon^2},\qquad -\frac{\nu(\nu+1)}{\varepsilon^2},\qquad \lambda-\frac{(\nu+\nu_1+\nu_2)(\nu+\nu_1+\nu_2-1)}{\varepsilon^2},$$

les termes qui devront provenir des zéros 0, K, $K+iK'$ et iK' de P seront

$$\frac{n_3(n_3+1)}{\varepsilon^2},\qquad \frac{n_2(n_2+1)}{\varepsilon^2},\qquad \frac{n_1(n_1+1)}{\varepsilon^2},\qquad \frac{n(n+1)}{\varepsilon^2}$$

En nous reportant à ce que nous avons dit, il en résulte que P devra admettre ces zéros avec les degrés de multiplicité $2n_3$, $2n_2$, $2n_1$, $2n$. Nous sommes donc amenés à prendre pour P l'expression suivante:

$$(7) \qquad P = R\frac{H^{2n_3}(x)H_1^{2n_2}(x)\Theta_1^{2n_1}(x)\Theta^{2n}(x)}{H(x-a_1)H(x+a_1)H(x-a_2)H(x+a_2)\,\ldots\,H(x-a_\beta)H(x+a_\beta)}$$

où

$$\beta = n + n_1 + n_2 + n_3$$

et où R désigne une constante arbitraire.

Les résidus de P étant supposés tous égaux en valeur absolue ou, ce qui revient au même, à cause du facteur arbitraire R, tous égaux à plus ou moins un.

Sous cette forme on reconnaît de suite que P est une fonction doublement périodique aux périodes $2K$ et $2iK'$, qui ne change pas lorsqu'on y remplace x par $-x$. Comme de plus les parties principales des développements de l'expression (5) correspondant aux infinis 0, K, $K+iK'$ et iK' ne contiendront pas de termes en $\frac{1}{\varepsilon}$, par suite de la forme prise pour P, (puisque les développements de P correspondant à ces zéros ne contiennent que des puissances paires) il en résulte que l'expression (5) et le coefficient de y dans l'équation (1) auront mêmes parties principales pour les développements relatifs aux quatre infinis 0, K, $K+iK'$ et iK'.

Si maintenant nous prenons $\alpha = \frac{1}{4}$, comme tous les résidus de P sont supposés égaux à plus ou moins un, aucune des quantités $a_1, a_2, \ldots a_\beta$ qui sont des infinis simples de P ne sera un infini pour l'expression (5), par suite cette expression et le coefficient de y dans l'équation (1) ayant mêmes infinis et mêmes parties principales pour les développements correspondants ne pourront différer que par une constante, et nous allons voir que l'on peut disposer des quantités a de manière que cette constante soit nulle.

Tous les résidus de P étant supposés égaux à l'unité en valeur absolue, et ceux qui correspondent à des valeurs de a égales et de signes contraires, étant eux-mêmes égaux et de signes contraires, on pourra écrire aussi

$$(8) \qquad P = \frac{H'(x - a_1)}{H(x - a_1)} - \frac{H'(x + a_1)}{H(x + a_1)} + \ldots + \frac{H'(x - a_\beta)}{H(x - a_\beta)} - \frac{H'(x + a_\beta)}{H(x + a_\beta)} + C$$

C désignant une constante, ce que nous écrirons de la manière suivante:

$$P = \sum_1^\beta \left[\frac{H'(x - a_i)}{H(x - a_i)} - \frac{H'(x + a_i)}{H(x + a_i)}\right] + C$$

Pour la constante C on aura en exprimant que P est nul pour x égal à 0, K, $K + iK'$ et iK'

$$(9) \qquad \frac{C}{2} = \sum_1^\beta \frac{H'(a_i)}{H(a_i)} = \sum_1^\beta \frac{H'_1(a_i)}{H_1(a_i)} = \sum_1^\beta \frac{\Theta'_1(a_i)}{\Theta_1(a_i)} = \sum_1^\beta \frac{\Theta'(a_i)}{\Theta(a_i)}$$

Il faut remarquer toute fois que si l'une des quantités n_3, n_2, n_1, n était nulle l'expression correspondante de $\frac{C}{2}$ disparaîtrait. En égalant la 4[e] expression de $\frac{C}{2}$ à chacune des trois autres on aura entre les quantités a les trois équations suivantes

$$\sum_1^\beta \left(\frac{H'(a_i)}{H(a_i)} - \frac{\Theta'(a_i)}{\Theta(a_i)}\right) = 0, \quad \sum_1^\beta \left(\frac{H'_1(a_i)}{H_1(a_i)} - \frac{\Theta'(a_i)}{\Theta(a_i)}\right) = 0, \quad \sum_1^\beta \left(\frac{\Theta'_1(a_i)}{\Theta_1(a_i)} - \frac{\Theta'(a_i)}{\Theta(a_i)}\right) = 0,$$

équations qui peuvent s'écrire ainsi

$$(10) \qquad \sum_1^\beta \frac{\operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i}{\operatorname{sn} a_i} = 0, \qquad \sum_1^\beta \frac{\operatorname{sn} a_i \operatorname{dn} a_i}{\operatorname{cn} a_i} = 0, \qquad \sum_1^\beta \frac{\operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i}{\operatorname{dn} a_i} = 0.$$

(Il suffit pour passer des unes aux autres de se rappeler les expressions des dérivées logarithmiques de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$.)

Il y aura maintenant à exprimer que les $2n_3 - 1$ premières dérivées de P sont nulles pour $x = 0$, que les $2n_2 - 1$ premières dérivées de P sont nulles pour $x = K$, que les $2n_1 - 1$ premières dérivées de P sont nulles pour $x = K + iK'$ et enfin que les $2n - 1$ premières dérivées de P sont nulles pour $x = iK'$.

Mais l'on a

$$D_x P = \sum_1^\beta \left(D_x \frac{H'(x - a_i)}{H(x - a_i)} - D_x \frac{H'(x + a_i)}{H(x + a_i)}\right)$$

et par suite en vertu d'une relation bien connue

$$D_x P = \sum_1^\beta [k^2 \operatorname{sn}^2(x + a_i + iK') - \operatorname{sn}^2(x - a_i + iK')]$$

On conclue premièrement de cette expression que toutes les dérivées d'ordre impair de P sont nulles pour x égal à 0, K, $K + iK'$ et iK'.

Nous aurons donc seulement à écrire que les $n_3 - 1$ premières dérivées d'ordre pair de P soient nulles pour $x = 0$, les $n_2 - 1$ premières pour $x = K$, les $n_1 - 1$ premières pour $x = K + iK'$, et enfin les $n - 1$ premières également d'ordre pair pour $x = iK'$.

Cela fera donc $\beta - 4$ équations qui jointes aux trois équations (10) font en tout $\beta - 1$ équations. Mais comme il y a β quantités a il en restera une d'arbitraire, et on pourra en disposer de façon que l'expression (5) qui ne diffère que par une constante du coefficient de y dans l'équation (1) lui soit égal.

Revenons aux $\beta - 4$ équations dont nous avons parlé en dernier lieu, elles peuvent s'écrire de la manière suivante:

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^\beta D_{a_i} \operatorname{sn}^2(a_i + iK') = 0, \quad \sum_1^\beta D_{a_i}^3 \operatorname{sn}^2(a_i + iK') = 0, \quad \ldots\ldots \\ \qquad\qquad \sum_1^\beta D_{a_i}^{2n_3-3} \operatorname{sn}^2(a_i + iK') = 0 \\ \sum_1^\beta D_{a_i} \operatorname{sn}^2(a_i + K + iK') = 0, \quad \sum_1^\beta D_{a_i}^3 \operatorname{sn}^2(a_i + K + iK') = 0, \quad \ldots\ldots \\ \qquad\qquad \sum_1^\beta D_{a_i}^{2n_2-3} \operatorname{sn}^2(a_i + K + iK') = 0 \\ \sum_1^\beta D_{a_i} \operatorname{sn}^2(a_i + K) = 0, \quad \sum_1^\beta D_{a_i}^3 \operatorname{sn}^2(a_i + K) = 0, \quad \ldots\ldots \\ \qquad\qquad \sum_1^\beta D_{a_i}^{2n_1-3} \operatorname{sn}^2(a_i + K) = 0 \\ \sum_1^\beta D_{a_i} \operatorname{sn}^2 a_i = 0, \quad \sum_1^\beta D_{a_i}^3 \operatorname{sn}^2 a_i = 0, \quad \ldots\ldots \quad \sum_1^\beta D_{a_i}^{2n-3} \operatorname{sn}^2 a_i = 0 \end{array} \right.$$

Mais on peut les mettre sous une forme différente qui sera en général plus avantageuse.

Considérons par exemple les équations

$$\sum_1^\beta D_{a_i}^{2s-1} \operatorname{sn}^2 a_i = 0$$

qui correspondent aux différentes valeurs de s. Celles qui correspondent aux premières valeurs de s seront:

1° pour $s = 1$

$$\sum_1^\beta D_{a_i} \operatorname{sn}^2 a_i = 2 \sum_1^\beta \operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i = 0$$

2° pour $s = 2$

$$\sum_1^\beta D_{a_i}^3 \operatorname{sn}^2 a_i = 8 \sum_1^\beta \operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i [-(1 + k^2) + 3k^2 \operatorname{sn}^2 a_i] = 0$$

Cette équation devient en tenant compte de l'équation précédente

$$\sum_1^\beta \operatorname{sn}^3 a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i = 0$$

On ferait voir bien facilement que la loi est générale, il suffirait d'établir que la dérivée d'ordre $2s - 1$ de $\operatorname{sn}^2 a_i$ est égale au produit de $\operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i$ par un polynome en $\operatorname{sn}^2 a_i$ de degré $s - 1$. Or nous avons vérifié le fait pour les deux premières valeurs de s, et on ferait voir que si le fait est vrai pour une valeur de s il l'est aussi pour la valeur suivante.

On obtiendra donc la série des équations suivantes

$$(12) \qquad \left|\begin{array}{l} \sum_1^\beta \operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i = 0 \\ \sum_1^\beta \operatorname{sn}^3 a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum_1^\beta \operatorname{sn}^{2n-3} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i = 0 \end{array}\right.$$

Les autres équations se transforment d'une manière toute semblable, et en remplaçant de plus $\mathrm{sn}(a_i + K)$, $\mathrm{sn}(a_i + K + iK')$, $\mathrm{sn}(a_i + iK')$ par leurs valeurs ainsi que $\mathrm{cn}(a_i + K)$, $\mathrm{dn}(a_i + K)$, ..., on obtiendra les équations suivantes

$$
(12)\quad\left\{
\begin{array}{llll}
\displaystyle\sum_1^\beta \frac{\mathrm{cn}\, a_i \,\mathrm{sn}\, a_i}{\mathrm{dn}^3 a_i} = 0, & \displaystyle\sum_1^\beta \frac{\mathrm{cn}^3 a_i \,\mathrm{sn}\, a_i}{\mathrm{dn}^5 a_i} = 0, & \ldots\ldots & \displaystyle\sum_1^\beta \frac{\mathrm{cn}^{2n_1-3} a_i \,\mathrm{sn}\, a_i}{\mathrm{dn}^{2n_1-1} a_i} = 0 \\[2ex]
\displaystyle\sum_1^\beta \frac{\mathrm{dn}\, a_i \,\mathrm{sn}\, a_i}{\mathrm{cn}^3 a_i} = 0, & \displaystyle\sum_1^\beta \frac{\mathrm{dn}^3 a_i \,\mathrm{sn}\, a_i}{\mathrm{cn}^5 a_i} = 0, & \ldots\ldots & \displaystyle\sum_1^\beta \frac{\mathrm{dn}^{2n_2-3} a_i \,\mathrm{sn}\, a_i}{\mathrm{cn}^{2n_2-1} a_i} = 0 \\[2ex]
\displaystyle\sum_1^\beta \frac{\mathrm{cn}\, a_i \,\mathrm{dn}\, a_i}{\mathrm{sn}^3 a_i} = 0, & \displaystyle\sum_1^\beta \frac{\mathrm{cn}\, a_i \,\mathrm{dn}\, a_i}{\mathrm{sn}^5 a_i} = 0, & \ldots\ldots & \displaystyle\sum_1^\beta \frac{\mathrm{cn}\, a_i \,\mathrm{dn}\, a_i}{\mathrm{sn}^{2n_3-1} a_i} = 0
\end{array}\right.
$$

Reste à trouver la dernière équation qui exprime que la différence constante de l'expression (5) et du coefficient de y dans l'équation (1) se réduit à zéro.

Pour cela faisons $x = iK' + \varepsilon$ et égalons les valeurs des termes constants dans les développements correspondants de l'expression (5) et du coefficient de y dans l'équation (1).

Si dans le coefficient de y dans l'équation (1) nous faisons $x = iK' + \varepsilon$, nous obtenons pour le terme constant du développement

$$
\begin{aligned}
&k^2(n_2 - \nu_1)(n_2 + \nu_1 + 1) + (n_1 - \nu)(n_1 + \nu + 1) + \\
&+ \frac{1 + k^2}{3}(n + \nu + \nu_1 + \nu_2)(n - \nu - \nu_1 - \nu_2 + 1) + h
\end{aligned}
$$

Si l'on fait $x = iK' + \varepsilon$, $\dfrac{P'}{P}$ devient

$$
2n_3 \frac{\Theta'(\varepsilon)}{\Theta(\varepsilon)} + 2n_2 \frac{\Theta'_1(\varepsilon)}{\Theta_1(\varepsilon)} + 2n_1 \frac{H'_1(\varepsilon)}{H_1(\varepsilon)} + 2n \frac{H'(\varepsilon)}{H(\varepsilon)} - \sum_1^\beta \left[\frac{\Theta'(\varepsilon - a_i)}{\Theta(\varepsilon - a_i)} + \frac{\Theta'(\varepsilon + a_i)}{\Theta(\varepsilon + a_i)}\right]
$$

et par suite en se bornant dans le développement de $\dfrac{P'}{P}$ au terme en ε il sera

$$
\frac{2n}{\varepsilon} - 2\left[\frac{n(1 + k^2)}{3} + n_2 k^2 + n_1 - \sum_1^\beta k^2 \,\mathrm{sn}^2 a_i\right]\varepsilon
$$

On en déduit pour le terme constant dans le développement de l'expression $\frac{1}{4}\frac{P'^2}{P^2} - \frac{1}{2} D_x \frac{P'}{P}$

$$-(2n-1)\left[n\,\frac{1+k^2}{3} + n_2 k^2 + n_1 - \sum_1^{\beta} k^2 \operatorname{sn}^2 a_i\right]$$

On a ensuite

$$\frac{V'}{V} = 2\nu\,\frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} + 2\nu_1\,\frac{H'_1(x)}{H_1(x)} + 2\nu_2\,\frac{H'(x)}{H(x)} - 2(\nu+\nu_1+\nu_2)\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$$

et en changeant x en $iK' + \varepsilon$ on en déduit pour le développement correspondant de $\frac{V'}{V}$

$$-2\,\frac{\nu+\nu_1+\nu_2}{\varepsilon} + 2\left[(\nu+\nu_1+\nu_2)\frac{1+k^2}{3} - \nu - k^2\nu_1\right]\varepsilon$$

et par suite pour le terme constant dans le développement de

$$-\frac{1}{4}\frac{V'^2}{V^2} + \frac{1}{2} D_x \frac{V'}{V}$$

$$(2\nu + 2\nu_1 + 2\nu_2 + 1)\left[(\nu+\nu_1+\nu_2)\frac{1+k^2}{3} - \nu - k^2\nu_1\right]$$

et comme P est nul pour $x = iK'$, on aura enfin pour le terme constant dans le développement de l'expression (5) relatif à $x = iK' + \varepsilon$

$$-(2n-1)\left[\frac{n(1+k^2)}{3} + n_2 k^2 + n_1 - \sum_1^{\beta} k^2 \operatorname{sn}^2 a_i\right] +$$
$$+ (2\nu + 2\nu_1 + 2\nu_2 + 1)\left[(\nu+\nu_1+\nu_2)\frac{1+k^2}{3} - \nu - k^2\nu_1\right]$$

En égalant cette expression à celle déjà trouvée pour le terme constant dans le développement du coefficient de y dans l'équation (1) on aura

$$(13)\qquad h = (2n-1)\sum_1^{\beta} k^2 \operatorname{sn}^2 a_i - (n + n_1 + \nu_1 + \nu_2)(n + n_1 - \nu_1 - \nu_2) -$$
$$- k^2(n + n_2 + \nu + \nu_2)(n + n_2 - \nu - \nu_2)$$

En faisant au lieu de $x = iK' + \varepsilon$, $x = \varepsilon$, $x = K + \varepsilon$, $x = K + iK' + \varepsilon$, on obtiendra les trois autres expressions de h qui suivent:

$$
(13)\left\{\begin{aligned}
h &= (2n_3 - 1)\sum_1^\beta k^2 \operatorname{sn}^2(a_i + iK') - (n_3 + n_2 + \nu_1 + \nu_2)(n_3 + n_2 - \nu_1 - \nu_2) - \\
&\qquad - k^2(n_3 + n_1 + \nu + \nu_2)(n_3 + n_1 - \nu - \nu_2) \\
h &= (2n_2 - 1)\sum_1^\beta k^2 \operatorname{sn}^2(a_i + K + iK') - (n_2 + n_3 + \nu_1 + \nu_2)(n_2 + n_3 - \nu_1 - \nu_2) - \\
&\qquad - k^2(n_2 + n + \nu + \nu_2)(n_2 + n - \nu - \nu_2) \\
h &= (2n_1 - 1)\sum_1^\beta k^2 \operatorname{sn}^2(a_i + K) - (n_1 + n + \nu_1 + \nu_2)(n_1 + n - \nu_1 - \nu_2) - \\
&\qquad - k^2(n_1 + n_3 + \nu + \nu_2)(n_1 + n_3 - \nu - \nu_2)
\end{aligned}\right.
$$

Si l'une des quantités n était nulle, l'expression correspondante de h disparaîtrait.

Nous ferons remarquer qu'en égalant entre elles les quatre valeurs de h on obtiendrait trois équations qui sont des conséquences de celles établies précédemment.

Nous avons supposé précédemment $\alpha = \frac{1}{4}$.

On en déduit $\sqrt{\alpha} = \frac{1}{2}$.

On aura ensuite

$$\int P dx = L \frac{H(x - a_1) H(x - a_2) \dots\dots H(x - a_\beta)}{H(x + a_1) H(x + a_2) \dots\dots H(x + a_\beta)} + Cx$$

et par suite l'intégrale générale donnée par la formule (4)

$$(4) \qquad \sqrt{\frac{V}{P}}\left[A e^{a\int P dx} + B e^{-a\int P dx}\right]$$

sera

$$\operatorname{dn}^\nu x \operatorname{cn}^{\nu_1} x \operatorname{sn}^{\nu_2} x \frac{\sqrt{H(x - a_1) H(x + a_1) H(x - a_2) H(x + a_2) \dots\dots H(x - a_\beta) H(x + a_\beta)}}{H^{n_3}(x) H_1^{n_2}(x) \Theta_1^{n_1}(x) \Theta^n(x)} .$$

$$\cdot\left[A\sqrt{\frac{H(x - a_1) \dots\dots H(x - a_\beta)}{H(x + a_1) \dots\dots H(x + a_\beta)}}\, e^{\frac{C}{2}x} + B\sqrt{\frac{H(x + a_1) \dots\dots H(x + a_\beta)}{H(x - a_1) \dots\dots H(x - a_\beta)}}\, e^{-\frac{C}{2}x}\right]$$

ce qui peut s'écrire

$$(14) \qquad \mathrm{dn}^{\nu} x\, \mathrm{cn}^{\nu_1} x\, \mathrm{sn}^{\nu_2} x \left| A \frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\ \ldots\ldots\ H(x-a_\beta)}{H^{n_3}(x)H_1^{n_2}(x)\Theta_1^{n_1}(x)\Theta^{n}(x)} e^{\frac{C}{2}x} + \right.$$

$$\left. + B \frac{H(x+a_1)H(x+a_2)\ \ldots\ldots\ H(x+a_\beta)}{H^{n_3}(x)H_1^{n_2}(x)\Theta_1^{n_1}(x)\Theta^{n}(x)} e^{-\frac{C}{2}x} \right|$$

où $\frac{C}{2}$ a la valeur donnée à la page (114) par les formules (9).

Les expressions (9) de $\frac{C}{2}$ supposent toute fois que les quatre quantités n, n_1, n_2 et n_3 ne sont pas nulles en même temps.

Examinons donc le cas où l'on a

$$n = n_1 = n_2 = n_3 = 0$$

Dans ce cas P se réduit à une constante C_1 et par suite en vertu de la formule (4) l'intégrale générale de l'équation (1) devient (en prenant $\alpha = 1$)

$$\mathrm{dn}^{\nu} x\, \mathrm{cn}^{\nu_1} x\, \mathrm{sn}^{\nu_2} x \left[A e^{C_1 x} + B e^{-C_1 x}\right]$$

et on aura pour déterminer cette constante C_1 en fonction de h la relation

$$h = C_1^2 + (\nu_1 + \nu_2)^2 + k^2(\nu + \nu_2),$$

expression que l'on obtient comme les précédentes en égalant les termes constants dans les développements de l'expression (5) et du coefficient de y dans l'équation (1), pour $x = iK' + \varepsilon$ par exemple.

III.

Avant d'aller plus loin traitons encore les deux cas suivants:

1° $n_1 = n_2 = n_3 = 0, \qquad n = 1,$

cas qui comprend l'équation de Lamé pour $n = 1$.

L'intégrale sera

$$\operatorname{dn}^{\nu} x \operatorname{cn}^{\nu_1} x \operatorname{sn}^{\nu_2} x \left[A \frac{H(x-a)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} x} + B \frac{H(x+a)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} x} \right]$$

et l'on aura pour déterminer a en fonction de h l'équation

$$h = k^2 \operatorname{sn}^2 a + (\nu_1 + \nu_2 + 1)(\nu_1 + \nu_2 - 1) + k^2(\nu + \nu_2 + 1)(\nu + \nu_2 - 1)$$

Si en particulier on a $\nu = \nu_1 = \nu_2 = 0$, ce qui correspond à l'équation de LAMÉ pour $n = 1$, on trouve

$$h = k^2 \operatorname{sn}^2 a - (1 + k^2)$$

ce qui est bien la valeur donnée par M. HERMITE.

2° Soit maintenant $n = n_2 = n_3 = 0 \qquad n_1 = 1$, cas qui comprend l'équation de M. PICARD pour $n = 1$.

L'intégrale générale sera

$$\operatorname{dn}^{\nu} x \operatorname{cn}^{\nu_1} x \operatorname{sn}^{\nu_2} x \left[A \frac{H(x-a)}{\Theta_1(x)} e^{\frac{\Theta'_1(a)}{\Theta_1(a)} x} + B \frac{H(x+a)}{\Theta_1(x)} e^{-\frac{\Theta'_1(a)}{\Theta_1(a)} x} \right]$$

et l'on aura pour déterminer a en fonction de h la relation

$$h = k^2 \operatorname{sn}^2 (a + K) + (\nu_1 + \nu_2 + 1)(\nu_1 + \nu_2 - 1) + k^2(\nu + \nu_2 + 1)(\nu + \nu_2 - 1)$$

Si en particulier

$$\nu_1 = \nu_2 = 0, \qquad \nu = 1,$$

ce qui donne l'équation de M. PICARD pour $n = 1$, l'intégrale générale devient

$$A \frac{H(x-a)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'_1(a)}{\Theta_1(a)} x} + B \frac{H(x+a)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'_1(a)}{\Theta_1(a)} x}$$

et l'on a

$$h = k^2 \operatorname{sn}^2 (a + K) - 1 = - \operatorname{dn}^2 (a + K) = - \frac{k'^2}{\operatorname{dn}^2 a}$$

Ce sont bien les résultats donnés par M. PICARD (ici $h = -\alpha$ le terme en y étant dans le second membre dans l'équation (1)).

Dans les deux exemples précédents nous avons pu obtenir l'expression de a en fonction de h, mais en général il n'en est pas ainsi, et nous obtiendrons seulement une équation ayant pour racines soit $\mathrm{sn}^2 a_1$, $\mathrm{sn}^2 a_2, \ldots\ldots \mathrm{sn}^2 a_\beta$, soit $\mathrm{cn}^2 a_1$, $\mathrm{cn}^2 a_2, \ldots\ldots \mathrm{cn}^2 a_\beta$, soit enfin $\mathrm{dn}^2 a_1$, $\mathrm{dn}^2 a_2, \ldots\ldots \mathrm{dn}^2 a_\beta$, suivant qu'il sera plus avantageux d'obtenir l'une ou l'autre de ces trois équations.

Toute fois avant de nous occuper de la détermination de cette équation nous ferons la remarque suivante.

Si l'on a $n = n_1 = n_2 = n_3$ et si dans ce cas $\mathrm{sn}^2 a_i$ est une racine de l'équation qui a pour racines $\mathrm{sn}^2 a_1$, $\mathrm{sn}^2 a_2, \ldots\ldots \mathrm{sn}^2 a_\beta$, cette équation admettera aussi les racines $\mathrm{sn}^2 (a_i + K)$, $\mathrm{sn}^2 (a_i + iK')$, $\mathrm{sn}^2 (a_i + K + iK')$.

On peut dans ce cas, puisque $n = n_1 = n_2 = n_3$, prendre pour les équations qui déterminent les quantités a les équations (9)

$$\sum_1^\beta \frac{H'(a_i)}{H(a_i)} = \sum_1^\beta \frac{H'_1(a_i)}{H_1(a_i)} = \sum_1^\beta \frac{\Theta'(a_i)}{\Theta(a_i)} = \sum_1^\beta \frac{\Theta'_1(a_i)}{\Theta_1(a_i)}$$

et les équations (11)

$$\sum_1^\beta D_{a_i} \mathrm{sn}^2 a_i = 0, \;\ldots\ldots,\; \sum_1^\beta D_{a_i}^{2n-3} \mathrm{sn}^2 a_i = 0$$

$$\sum_1^\beta D_{a_i} \mathrm{sn}^2 (a_i + K) = 0, \;\ldots\ldots,\; \sum_1^\beta D_{a_i}^{2n-3} \mathrm{sn}^2 (a_i + K) = 0$$

$$\sum_1^\beta D_{a_i} \mathrm{sn}^2 (a_i + iK') = 0, \;\ldots\ldots,\; \sum_1^\beta D_{a_i}^{2n-3} \mathrm{sn}^2 (a_i + iK') = 0$$

$$\sum_1^\beta D_{a_i} \mathrm{sn}^2 (a_i + K + iK') = 0, \;\ldots\ldots,\; \sum_1^\beta D_{a_i}^{2n-3} \mathrm{sn}^2 (a_i + K + iK') = 0$$

et l'on voit de suite que ces équations ne changent pas si l'on remplace a_i par l'une des quantités $a_i + K$, $a_i + iK'$, $a_i + K + iK'$, par suite dans ce cas le degré de l'équation pourra s'abaisser au degré $n = \frac{\beta}{4}$.

IV.

Occupons nous maintenant de déterminer cette équation, en supposant d'abord $n_1 = n_2 = n_3 = 0$, hypothèse qui donnera comme cas particulier l'équation de Lamé pour n quelconque.

Posons pour ce cas

$$\operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i = u_i$$

et

$$\operatorname{sn}^2 a_i = x_i$$

Les équations qui déterminent les quantités a deviendront:

$$\sum_1^n u_i = 0, \quad \sum_1^n x_i u_i = 0, \; \ldots\ldots \; \sum_1^n x_i^{n-2} u_i = 0$$

Si par suite on résout ces équations par rapport aux quantités u, on aura

$$\frac{u_1}{\Delta_1} = -\frac{u_2}{\Delta_2} = \ldots\ldots = (-1)^{i-1}\frac{u_i}{\Delta_i} = \ldots\ldots = (-1)^{n-1}\frac{u_n}{\Delta_n}$$

où

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_2 & x_3 & \ldots\ldots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \ldots\ldots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \ldots\ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_1 & x_3 & \ldots\ldots & x_n \\ x_1^2 & x_3^2 & \ldots\ldots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ x_1^{n-2} & x_3^{n-2} & \ldots\ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_{n-1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots\ldots & x_{n-1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \ldots\ldots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

Nous poserons de plus

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots\ldots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots\ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_n),$$

$f(x)$ étant par suite la fonction qui, égalée à zéro, nous donnera l'équation cherchée.

Mais on aura en vertu d'un théorème connu, le théorème de VANDERMONDE

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{l} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \ldots\ldots (x_n - x_1) \\ (x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \ldots\ldots (x_n - x_2) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (x_n - x_{n-1}) \end{array} \right.$$

$$\Delta_1 = \left\{ \begin{array}{l} (x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \ldots\ldots (x_n - x_2) \\ (x_4 - x_3)(x_5 - x_3) \ldots\ldots (x_n - x_3) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (x_n - x_{n-1}) \end{array} \right.$$

. . . .

. . . .

$$\Delta_n = \left\{ \begin{array}{l} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \ldots\ldots (x_{n-1} - x_1) \\ (x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \ldots\ldots (x_{n-1} - x_2) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (x_{n-1} - x_{n-2}) \end{array} \right.$$

On a d'ailleurs

$$f'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots\ldots (x_1 - x_n)$$
$$f'(x_2) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \ldots\ldots (x_2 - x_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f'(x_n) = (x_n - x_1)(x_n - x_2) \ldots\ldots (x_n - x_{n-1})$$

et on en deduit

$$\varDelta = (-1)^{n-1}\varDelta_1 f'(x_1) = \ldots\ldots = (-1)^{n-i}\varDelta_i f'(x_i) = \ldots\ldots = \varDelta_n f'(x_n)$$

Par suite en remplaçant $\varDelta_1, \varDelta_2, \ldots\ldots \varDelta_i, \ldots\ldots \varDelta_n$ par leurs valeurs tirées des équations précédentes, les équations dont nous nous occupons deviendront

$$\lambda = u_1 f'(x_1) = u_2 f'(x_2) = \ldots\ldots = u_i f'(x_i) = \ldots\ldots = u_n f'(x_n),$$

λ désignant la valeur commune de ces expressions.

En remplaçant $u_1, u_2, \ldots\ldots u_n$ par leur valeur, ces équations s'écriront:

$$(15) \qquad \lambda = \operatorname{sn} a_1 \operatorname{cn} a_1 \operatorname{dn} a_1 f'(x_1) = \operatorname{sn} a_2 \operatorname{cn} a_2 \operatorname{dn} a_2 f'(x_2) = \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots = \operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i f'(x_i) = \ldots\ldots = \operatorname{sn} a_n \operatorname{cn} a_n \operatorname{dn} a_n f'(x_n)$$

Telles sont les équations qui doivent servir à déterminer les quantités a ou plutôt les coefficients de la fonction $f(x)$ qui, égalée à zéro, a pour racines $\operatorname{sn}^2 a_1, \operatorname{sn}^2 a_2, \ldots\ldots \operatorname{sn}^2 a_n$.

Soit

$$f(x) = x^n + \alpha_0 x^{n-1} + \alpha_1 x^{n-2} + \ldots\ldots + \alpha_{n-1}$$

On aura d'abord en vertu de la relation (13)

$$h = (2n-1)\sum_1^n k^2 \operatorname{sn}^2 a_i - (n + \nu_1 + \nu_2)(n - \nu_1 - \nu_2) - k^2(n + \nu + \nu_2)(n - \nu - \nu_2)$$

(puisque dans le cas présent $n_1 = n_2 = n_3 = 0$)

$$(16) \qquad \alpha_0 = -\sum \operatorname{sn}^2 a_i = -\frac{h + (n + \nu_1 + \nu_2)(n - \nu_1 - \nu_2) + k^2(n + \nu + \nu_2)(n - \nu - \nu_2)}{(2n-1)k^2}$$

α_0 est donc connu en fonction de h, ν, ν_1 et ν_2 qui sont les données de la question.

Elevons les équations (15) au carré, elle deviendront

$$(17)\qquad \lambda^2 = x_1(1-x_1)(1-k^2x_1)f'^2(x_1) = x_2(1-x_2)(1-k^2x_2)f'^2(x_2) = \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots = x_i(1-x_i)(1-k^2x_i)f'^2(x_i) = \ldots\ldots = x_n(1-x_n)(1-k^2x_n)f'^2(x_n)$$

Nous en déduirons le calcul des coefficients de $f(x)$ en nous basant sur la remarque suivante:

L'équation

$$x(1-x)(1-k^2x)f'^2(x) - \lambda^2 = 0$$

qui est de degré $2n+1$ admettra en vertu des équations (17) les racines x_1, x_2, ... x_n, son premier membre sera donc divisible par $f(x)$ et l'on aura par suite

$$(18)\qquad x(1-x)(1-k^2x)f'^2(x) - \lambda^2 = f(x)f_1(x),$$

$f_1(x)$ étant un polynome entier en x de degré $n+1$.

En prenant la dérivée de l'équation (18), on en déduira

$$(19)\qquad f'(x)\Big[[1-2(1+k^2)x+3k^2x^2]f'(x)+2[x-(1+k^2)x^2+k^2x^3]f''(x)\Big] =$$
$$= f'(x)f_1(x) + f(x)f'_1(x)$$

Mais tous les infinis de P étant simples on doit supposer toutes les racines de $f(x)$ différentes, il en résulte que $f'(x)$ qui divise le 1[er] membre et qui est premier avec $f(x)$ doit diviser $f'_1(x)$ et comme $f'_1(x)$ est de degré n et $f'(x)$ de degré $n-1$, on aura, A et B désignant des constantes

$$(20)\qquad f'_1(x) = (Ax+B)f'(x)$$

Si par suite on pose

$$f_2(x) = [1-2(1+k^2)x+3k^2x^2]f'(x)+2[x-(1+k^2)x^2+k^2x^3]f''(x),$$

l'équation (19) deviendra en la divisant par $f'(x)$

$$f_2(x) = f_1(x) + (Ax+B)f(x);$$

prenant de nouveau la dérivée de cette équation et remplaçant $f'_1(x)$ par sa valeur donnée par l'équation (20) on aura

$$(21)\qquad f'_2(x) = 2(Ax+B)f'(x) + Af(x)$$

Mais en prenant $\alpha_{-1} = 1$ nous pouvons écrire

$$f(x) = \sum_0^n a_{i-1} x^{n-i}$$

et par suite

$$f'(x) = \sum_0^{n-1} (n-i) a_{i-1} x^{n-i-1}$$

$$f''(x) = \sum_0^{n-2} (n-i)(n-i-1) a_{i-1} x^{n-i-2}$$

et en convenant de plus de prendre $\alpha_i = 0$ pour $i < -1$ ou $i > n-1$, nous aurons

$$f_2(x) = \sum_{-1}^{n} [a_{i-2}(n-i+1)(2n-2i+1) - 2(1+k^2)a_{i-1}(n-i)^2 + \\ + k^2(n-i-1)(2n-2i-1)a_i] x^{n-i}$$

et aussi

$$2(Ax+B)f'(x) + Af(x) = \sum_{-1}^{n-1} [A(2n-2i-1)a_i + 2B(n-i)a_{i-1}] x^{n-i-1}$$

et en identifiant alors les deux membres de l'équation (21) on aura les $n+1$ équations suivantes qui correspondent aux valeurs -1, 0, 1, ... $n-1$ de i

$$(22) \qquad (n-i)[a_{i-2}(n-i+1)(2n-2i+1) - 2(1+k^2)a_{i-1}(n-i)^2 + \\ + k^2(n-i-1)(2n-2i-1)a_i] = A(2n-2i-1)a_i + 2B(n-i)a_{i-1}$$

Les deux premières de ces équations sont:

$$(n+1)k^2 n(2n+1) = A(2n+1)$$

$$n[-2(1+k^2)n^2 + k^2(n-1)(2n-1)a_0] = A(2n-1)a_0 + 2Bn$$

et elles donnent

$$A = n(n+1)k^2$$

$$B = -n^2(1+k^2) - (2n-1)k^2 a_0$$

Portant ces valeurs de A et de B dans l'équation (22) on en déduira

$$\alpha_i = \frac{[i(2n-i)(1+k^2)+(2n-1)k^2\alpha_0]2(n-i)\alpha_{i-1}+(n-i)(n-i+1)(2n-2i+1)\alpha_{i-2}}{k^2(2n-2i-1)(i+1)(2n-i)}, \tag{23}$$

α_0 étant donné par la formule (16), la formule (23) permettra de calculer de proche en proche tous les coefficients de $f(x)$.

L'équation $f(x) = 0$ admet pour racinés $\operatorname{sn}^2 a_1$, $\operatorname{sn}^2 a_2$, ... $\operatorname{sn}^2 a_n$, mais lorsque le signe de l'une des quantités a_1, a_2, ... a_n aura été choisi arbitrairement, les signes de toutes les autres seront déterminés par ce fait que ces quantités doivent satisfaire aux relations (15)

$$\operatorname{sn} a_1 \operatorname{cn} a_1 \operatorname{dn} a_1 f'(\operatorname{sn}^2 a_1) = \ldots\ldots = \operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i f'(\operatorname{sn}^2 a_i) = \ldots\ldots$$

L'intégrale générale étant ensuite donnée par la formule (14) où l'on fait $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ sera

$$\operatorname{dn}^{\nu} x \operatorname{cn}^{\nu_1} x \operatorname{sn}^{\nu_2} x \left[A \frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\ldots\ldots H(x-a_n)}{\Theta^n(x)} e^{\frac{C}{2}x} + \right. \tag{24}$$

$$\left. + B \frac{H(x+a_1)H(x+a_2)\ldots\ldots H(x+a_n)}{\Theta^n(x)} e^{\frac{C}{2}x} \right]$$

où

$$\frac{C}{2} = \sum_1^n \frac{\Theta'(a_i)}{\Theta(a_i)}$$

Le problème pourrait donc être considéré comme résolu puisque l'équation $f(x) = 0$ ferait connaître les quantités a au signe près, en donnant $\operatorname{sn}^2 a_1$, $\operatorname{sn}^2 a_2$, ... $\operatorname{sn}^2 a_n$ et que la concordance des signes de ces quantités est donnée par les relations (15).

Toute fois M. Hermite a fait voir dans son beau mémoire sur l'équation de Lamé que l'intégrale de cette équation pouvait être obtenue d'une façon complètement explicite et c'est ce même but que nous allons nous proposer d'obtenir, en nous inspirant des travaux de ce grand géomètre.

V.

Pour cela remarquons que la fonction doublement périodique de 2^{de} espèce

$$\frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\,\ldots\ldots\,H(x-a_n)}{\Theta^n(x)}e^{\frac{C}{2}x}$$

peut s'écrire de la manière suivante

$$(25)\qquad e^{\frac{(n+1)\pi i}{2K}x}\frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\,\ldots\ldots\,H(x-a_n)H(x+\omega)}{\Theta^{n+1}(x)}\frac{\Theta(x)}{H(x+\omega)}e^{-\frac{(n+1)\pi i}{2K}x+\frac{C}{2}x}$$

Mais si l'on prend $\omega=\sum_1^n a_i+(n+1)iK'$, le 1^{er} facteur de l'expression (25) sera une fonction doublement périodique de x. Nous allons maintenant nous proposer de calculer les coefficients de cette fonction doublement périodique ainsi que ω et $\frac{C}{2}$ en fonction des coefficients connus $\alpha_0, \alpha_1, \ldots\ldots \alpha_{n-1}$.

Toute fois nous allons d'abord obtenir l'expression de la quantité que nous avons désignée par λ^2. Nous partirons pour cela de l'équation (18)

$$[x-(1+k^2)x^2+k^2x^3]f'^2(x)-\lambda^2=f(x)f_1(x)$$

on a d'ailleurs l'équation (20)

$$f'_1(x)=(Ax+B)f'(x)$$

Si donc on pose

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+a_0\frac{x^n}{n}+\ldots\ldots+a_{n-1}x$$

on aura, D désignant une constante

$$(26)\qquad f_1(x)=(Ax+B)f(x)-AF(x)+D$$

L'équation (18) deviendra alors

$$[x-(1+k^2)x^2+k^2x^3]f'^2(x)-\lambda^2=(Ax+B)f^2(x)-AF(x)f(x)+Df(x)$$

et en égalant dans les deux membres le terme constant et le coefficient du terme en x on aura

$$-\lambda^2 = Ba_{n-1}^2 + Da_{n-1}$$

$$a_{n-2}^2 = Aa_{n-1}^2 + 2Ba_{n-1}a_{n-2} - Aa_{n-1}^2 + Da_{n-2};$$

on tire de là

$$\lambda^2 = a_{n-1}[Ba_{n-1} - a_{n-2}]$$

ou en remplaçant B par sa valeur (page 127)

$$\lambda^2 = -a_{n-1}\Big[a_{n-2} + a_{n-1}[(1+k^2)n^2 + (2n-1)k^2a_0]\Big] \tag{27}$$

Ceci fait proposons nous d'obtenir la fonction doublement périodique

$$Ae^{\frac{\pi(n+1)}{2K}ix}\frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\ \ldots\ldots\ H(x-a_n)H(x+\omega)}{\Theta^{n+1}(x)};$$

cette fonction étant doublement périodique d'ordre $n+1$, on pourra la mettre sous la forme[1]

$$M\varphi(\mathrm{sn}^2 x) - \mathrm{sn}\, x\, \mathrm{cn}\, x\, \mathrm{dn}\, x \psi(\mathrm{sn}^2 x)$$

où M désigne une constante, où $\varphi(x)$ est un polynôme entier de degré m, n étant égal à $2m$ ou à $2m-1$, et où $\psi(x)$ est un polynôme entier de degré $m-1$ si $n=2m$, de degré $m-2$ si $n=2m-1$ ($\psi(x)$ est donc dans tous les cas de degré $n-m-1$).

Il s'agit maintenant de déterminer les polynômes $\varphi(x)$ et $\psi(x)$.

Mais on devra avoir d'abord

$$M\varphi(\mathrm{sn}^2 a_i) - \mathrm{sn}\, a_i\, \mathrm{cn}\, a_i\, \mathrm{dn}\, a_i \psi(\mathrm{sn}^2 a_i) = 0$$

et aussi en vertu des équations (15)

$$\lambda - \mathrm{sn}\, a_i\, \mathrm{cn}\, a_i\, \mathrm{dn}\, a_i f'(\mathrm{sn}^2 a_i) = 0$$

On déduit de ces deux équations

$$\mathrm{sn}\, a_i\, \mathrm{cn}\, a_i\, \mathrm{dn}\, a_i = \frac{M\varphi(\mathrm{sn}^2 a_i)}{\psi(\mathrm{sn}^2 a_i)} = \frac{\lambda}{f'(\mathrm{sn}^2 a_i)}$$

---

(1) Voir traité de Calcul différentiel et intégral de Lacroix, note de M. Hermite.

ou en prenant $M = \lambda$

$$\psi(\mathrm{sn}^2 a_i) = \varphi(\mathrm{sn}^2 a_i) f'(\mathrm{sn}^2 a_i)$$

et cette équation devant avoir lieu pour toutes les valeurs de $\mathrm{sn}^2 x$ qui annulent $f(x)$, on en conclue

$$\psi(x) = \varphi(x) f'(x) - \theta(x) f(x) \tag{28}$$

$\theta(x)$ devant, pour que cette équation soit possible, être de degré $m - 1$.

On pourra d'ailleurs toujours déterminer les coefficients de $\varphi(x)$ et de $\theta(x)$ par les conditions que ces fonctions doivent remplir.

En effet dans tous les cas $\psi(x)$ sera de degré $n - m - 1$; on aura donc à exprimer que les coefficients des puissances de x supérieures à $n - m - 1$ sont nuls, et comme le second membre est de degré $n + m - 1$, cela fera $2m$ équations qui étant linéaires et homogènes par rapport aux coefficients inconnus permetteront de les déterminer à un facteur constant près. Les coefficients de $\varphi(x)$ et de $\theta(x)$ étant connus on en déduira de suite ceux de $\psi(x)$.

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant ainsi déterminés, on aura, puisque nous avons pris $M = \lambda$, et en choisissant convenablement le facteur A,

$$\frac{Ae^{\frac{\pi(n+1)i}{2K}x} H(x - a_1) H(x - a_2) \ldots\ldots H(x - a_n) H(x + \omega)}{\Theta^{n+1}(x)} = \tag{29}$$
$$= \lambda\varphi(\mathrm{sn}^2 x) - \mathrm{sn}\, x\, \mathrm{cn}\, x\, \mathrm{dn}\, x \psi(\mathrm{sn}^2 x)$$

car la fonction doublement périodique d'ordre $(n + 1)$

$$\lambda\varphi(\mathrm{sn}^2 x) - \mathrm{sn}\, x\, \mathrm{cn}\, x\, \mathrm{dn}\, x \psi(\mathrm{sn}^2 x)$$

qui admet en vertu des relations (28) et (15) les zéros $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ admettra aussi, puisque la somme de ces infinis est $(n + 1)iK'$, le zéro $-\left(\sum a_i + (n + 1)iK'\right) = -\omega$, en vertu du théorème de M. Liouville. Les deux membres de l'équation (29) seront donc identiques, avec un choix convenable du facteur constant A.

On aura ensuite en changeant x en $-x$

$$(-1)^{n+1} Ae^{-\frac{\pi(n+1)i}{2K}x} \frac{H(x + a_1) H(x + a_2) \ldots\ldots H(x + a_n) H(x - \omega)}{\Theta^{n+1}(x)} = \tag{30}$$
$$= \lambda\varphi(\mathrm{sn}^2 x) + \mathrm{sn}\, x\, \mathrm{cn}\, x\, \mathrm{dn}\, x \psi(\mathrm{sn}^2 x)$$

Nous allons maintenant calculer les coefficients de $\varphi(x)$, $\theta(x)$ et $\psi(x)$ et déterminer ensuite la valeur de ω.

Posons

$$
(31)\qquad \left\{\begin{aligned}
\varphi(x) &= A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots\ldots + A_mx^m\\
\theta(x) &= B_0 + B_1x + B_2x^2 + \ldots\ldots + B_{m-1}x^{m-1}\\
\psi(x) &= R_0 + R_1x + R_2x^2 + \ldots\ldots + R_{n-m-1}x^{n-m-1}
\end{aligned}\right.
$$

En égalant à zéro dans le second membre de l'équation (28) les coefficients des puissances de x supérieures à $n-m-1$ nous aurons les $2m$ équations suivantes

$$
(32)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{i=m}(n-m-i+1)A_i a_{m+i-2} - \sum_{i=0}^{i=m-1} a_{m+i-1}B_i = 0\\
&\sum_{i=0}^{i=m}(n-m-i+2)A_i a_{m+i-3} - \sum_{i=0}^{i=m-1} a_{m+i-2}B_i = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sum_{i=0}^{i=m}(n-i)A_i a_{i-1} - \sum_{i=0}^{i=m-1} a_iB_i = 0\\
&\sum_{i=0}^{i=m-1}(n-i)A_{i+1} a_{i-1} - \sum_{i=0}^{i=m-1} a_{i-1}B_i = 0\\
&\sum_{i=0}^{i=m-2}(n-i)A_{i+2} a_{i-1} - \sum_{i=0}^{i=m-2} a_{i-1}B_{i+1} = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&nA_m - B_{m-1} = 0
\end{aligned}\right.
$$

On tirera de ces équations les valeurs de $A_0, A_1, \ldots\ldots A_m, B_0, B_1, \ldots\ldots B_{m-1}$ à un facteur constant près, et en choisissant convenablement ce facteur constant on aura pour $\varphi(x)$ et $\theta(x)$ les expressions suivantes:

$$(33)\quad \varphi(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & \ldots & x^m & 0 & \ldots & 0 \\ (n-m+1)a_{m-2} & (n-m)a_{m-1} & \ldots & (n-2m+1)a_{2m-2} & (-a_{m-1}) & \ldots & (-a_{2m-2}) \\ (n-m+2)a_{m-3} & (n-m+1)a_{m-2} & \ldots & (n-2m+2)a_{2m-3} & (-a_{m-2}) & \ldots & (-a_{2m-3}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & (n-1)a_0 & \ldots & (n-m)a_{m-1} & (-a_0) & \ldots & (-a_{m-1}) \\ 0 & n & \ldots & (n-m+1)a_{m-2} & (-1) & \ldots & (-a_{m-2}) \\ 0 & 0 & \ldots & (n-m+2)a_{m-3} & 0 & \ldots & (-a_{m-3}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & n & 0 & \ldots & (-1) \end{vmatrix}$$

et

$$(34)\quad \theta(x)=\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & x & \ldots & x^{m-1} \\ (n-m+1)a_{m-2} & \ldots & (n-2m+1)a_{2m-2} & (-a_{m-1}) & (-a_m) & \ldots & (-a_{2m-2}) \\ (n-m+2)a_{m-3} & \ldots & (n-2m+2)a_{2m-3} & (-a_{m-2}) & (-a_{m-1}) & \ldots & (-a_{2m-3}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & \ldots & (n-m)a_{m-1} & (-a_0) & (-a_1) & \ldots & (-a_{m-1}) \\ 0 & \ldots & (n-m+1)a_{m-2} & (-1) & (-a_0) & \ldots & (-a_{m-2}) \\ 0 & \ldots & (n-m+2)a_{m-3} & 0 & (-1) & \ldots & . \\ . & \ldots & . & . & 0 & \ldots & . \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & n & 0 & 0 & \ldots & (-1) \end{vmatrix}$$

On en déduira ensuite l'expression des coefficients de $\psi(x)$; on aura:

$$R_s = \sum_{i=0}^{i=s} (i+1) A_{s-i} a_{n-i-2} - \sum_{i=0}^{i=s} B_{s-i} a_{n-i-1}$$

et par suite

$$(35)\qquad \psi(x) = \sum_{s=0}^{s=n-m-1} x^s \sum_{i=0}^{i=s} [(i+1)A_{s-i}\alpha_{n-i-2} - B_{s-i}\alpha_{n-i-1}]$$

ou bien en posant d'abord

$$\rho_0 = \alpha_{n-2} + 2\alpha_{n-3}x + 3\alpha_{n-4}x^2 + \ldots\ldots + (n-m)\alpha_{m-1}x^{n-m-1}$$
$$\rho_1 = \alpha_{n-2}x + 2\alpha_{n-3}x^2 + \ldots\ldots + (n-m-1)\alpha_m x^{n-m-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\rho_{n-m-1} = \alpha_{n-2}x^{n-m-1}$$

puis

$$-\varsigma_0 = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}x + \ldots\ldots + \alpha_m x^{n-m-1}$$
$$-\varsigma_1 = \alpha_{n-1}x + \alpha_{n-2}x^2 + \ldots\ldots + \alpha_{m+1}x^{n-m-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-\varsigma_{n-m-1} = \alpha_{n-1}x^{n-m-1}$$

$$(36)\qquad \psi(x) = \begin{vmatrix} \rho_0 & \rho_1 & \ldots & \varsigma_0 & \varsigma_1 & \ldots \\ (n-m+1)\alpha_{m-2} & (n-m)\alpha_{m-1} & \ldots & -\alpha_{m-1} & -\alpha_m & \ldots \\ (n-m+2)\alpha_{m-3} & (n-m+1)\alpha_{m-2} & \ldots & -\alpha_{m-2} & -\alpha_{m-1} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & (n-1)\alpha_0 & \ldots & -\alpha_0 & -\alpha_1 & \ldots \\ 0 & n & \ldots & -1 & -\alpha_0 & \ldots \\ . & 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots \\ . & . & \ldots & . & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \end{vmatrix}$$

Reportons-nous maintenant aux relations (29) et (30).

En faisant le produit de ces deux relations on en déduit

$$\lambda^2\varphi^2(\operatorname{sn}^2 x) - \operatorname{sn}^2 x \operatorname{cn}^2 x \operatorname{dn}^2 x \psi^2(\operatorname{sn}^2 x) = D(\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 \omega) f(\operatorname{sn}^2 x), \tag{37}$$

D désignant une constante, puisque les deux membres sont deux fonctions périodiques ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis.

Si on remplace $\operatorname{sn}^2 x$ par x, cette équation peut s'écrire

$$\lambda^2\varphi^2(x) - [x - (1 + k^2)x^2 + k^2x^3]\psi^2(x) = D(x - \operatorname{sn}^2 \omega) f(x) \tag{38}$$

Si dans les deux membres de l'équation (38) on égale les coefficients de x et les termes constants on a

$$\begin{aligned} 2\lambda^2 A_0 A_1 - R_0^2 &= D(a_{n-1} - \operatorname{sn}^2 \omega\, a_{n-2}) \\ \lambda^2 A_0^2 &= - D \operatorname{sn}^2 \omega\, a_{n-1} \end{aligned} \tag{39}$$

On en déduit

$$\operatorname{sn}^2 \omega = \frac{\lambda^2 A_0^2 a_{n-1}}{R_0^2 a_{n-1} + \lambda^2 A_0(A_0 a_{n-2} - 2A_1 a_{n-1})} \tag{40}$$

On peut aussi obtenir d'autres expressions de $\operatorname{sn}^2 \omega$, qui seront souvent plus simples, en égalant dans les deux membres de l'équation (38) les coefficients des puissances $n + 1$ de x on aura:

1° Si $n = 2m$

$$- k^2 R_{m-1}^2 = D \tag{41}$$

et en joignant à cette équation la seconde des équations (39), on en déduit pour le cas de $n = 2m$

$$\operatorname{sn}^2 \omega = \frac{\lambda^2 A_0^2}{k^2 a_{n-1} R_{m-1}^2} \tag{42}$$

2° Si $n = 2m - 1$,

on aura en égalant les coefficients des puissances $n + 1$ de x dans l'équation (38)

$$\lambda^2 A_m^2 = D \tag{43}$$

et en joignant à cette équation la seconde des équations (39), on en déduit pour le cas de $n = 2m - 1$

$$\operatorname{sn}^2 \omega = -\frac{A_0^2}{A_m^2 a_{n-1}} \tag{44}$$

La valeur de ω étant connue au signe près par la formule (40) ou par l'une des formules (42) ou (44), il faut encore fixer son signe.

Pour cela nous remarquerons qu'en vertu de l'équation (30), ω est un zéro de l'expression

$$\lambda\varphi(\operatorname{sn}^2 x) + \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \psi(\operatorname{sn}^2 x)$$

On aura donc la relation

$$\lambda = -\operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega \frac{\psi(\operatorname{sn}^2 \omega)}{\varphi(\operatorname{sn}^2 \omega)} \tag{45}$$

qui fixera la concordance des signes entre ω et λ.

Ayant obtenu l'expression de ω en fonction des coefficients connus, il nous reste à obtenir l'expression de $\frac{C}{2}$ en fonction des mêmes coefficients et de ω.

Dans le cas qui nous occupe (où $n_1 = n_2 = n_3 = 0$) on a

$$\frac{C}{2} = \sum_1^n \frac{\theta'(a_i)}{\theta(a_i)}$$

Si dans les relations (29) et (30) on change x en $x + iK'$, elles deviennent:

$$\lambda\varphi[\operatorname{sn}^2(x+iK')] - \operatorname{sn}(x+iK')\operatorname{cn}(x+iK')\operatorname{dn}(x+iK')\psi[\operatorname{sn}^2(x+iK')] =$$

$$= Ae^{\frac{(n+1)\pi i}{2K}x} \frac{\theta(x-a_1)\theta(x-a_2)\ \ldots\ldots\ \theta(x-a_n)\theta(x+\omega)}{H^{n+1}(x)}$$

et

$$\lambda\varphi[\operatorname{sn}^2(x+iK')] + \operatorname{sn}(x+iK')\operatorname{cn}(x+iK')\operatorname{dn}(x+iK')\psi[\operatorname{sn}^2(x+iK')] =$$

$$= (-1)^{n+1} Ae^{-\frac{(n+1)\pi i}{2K}x} \frac{\theta(x+a_1)\theta(x+a_2)\ \ldots\ldots\ \theta(x+a_n)\theta(x-\omega)}{H^{n+1}(x)}$$

et on en déduit

$$(46)\qquad \frac{\theta(x+a_1)\theta(x+a_2)\theta(x+a_3)\,\ldots\ldots\,\theta(x+a_n)\theta(x-\omega)}{\theta(x-a_1)\theta(x-a_2)\theta(x-a_3)\,\ldots\ldots\,\theta(x-a_n)\theta(x+\omega)}e^{-\frac{(n+1)\pi i}{K}x} =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{\lambda\varphi[\mathrm{sn}^2(x+iK')] + \mathrm{sn}(x+iK')\,\mathrm{cn}(x+iK')\,\mathrm{dn}(x+iK')\psi[\mathrm{sn}^2(x+iK')]}{\lambda\varphi[\mathrm{sn}^2(x+iK')] - \mathrm{sn}(x+iK')\,\mathrm{cn}(x+iK')\,\mathrm{dn}(x+iK')\psi[\mathrm{sn}^2(x+iK')]}$$

Posons maintenant

$$\varphi_1(x) = A_m + A_{m-1}x + \ldots\ldots + A_1x^{m-1} + A_0x^m$$

$$\psi_1(x) = R_{n-m-1} + R_{n-m-2}x + \ldots\ldots + R_1x^{n-m-2} + R_0x^{n-m-1}$$

et distinguons deux cas, suivant que n est pair ou impair.

1° n pair $\qquad\qquad n = 2m$

Alors en vertu des relations

$$\mathrm{sn}^2(x+iK') = \frac{1}{k^2\,\mathrm{sn}^2 x}$$

$$\mathrm{sn}(x+iK')\,\mathrm{cn}(x+iK')\,\mathrm{dn}(x+iK') = -\frac{\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x}{k^2\,\mathrm{sn}^3 x}$$

on aura en multipliant haut et bas dans le 2[e] membre de (46) par $k^{2m}\,\mathrm{sn}^{2m+1}x$

$$\frac{\theta(x+a_1)\theta(x+a_2)\,\ldots\ldots\,\theta(x+a_n)\theta(x-\omega)}{\theta(x-a_1)\theta(x-a_2)\,\ldots\ldots\,\theta(x-a_n)\theta(x+\omega)}e^{-\frac{(n+1)\pi i}{K}x} =$$

$$= \frac{\lambda\,\mathrm{sn}\,x\varphi_1(k^2\,\mathrm{sn}^2 x) - \mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x\psi_1(k^2\,\mathrm{sn}^2 x)}{\lambda\,\mathrm{sn}\,x\varphi_1(k^2\,\mathrm{sn}^2 x) + \mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x\psi_1(k^2\,\mathrm{sn}^2 x)}(-1)^{n+1};$$

prenant ensuite la dérivée logarithmique de cette expression et y faisant $x = 0$, on aura

$$2\sum_1^n \frac{\theta'(a_i)}{\theta(a_i)} - 2\frac{\theta'(\omega)}{\theta(\omega)} - \frac{(n+1)\pi i}{K} = -2\frac{\lambda\varphi_1(0)}{\psi_1(0)}$$

C'est à dire

$$(47)\qquad \frac{C}{2} - \frac{(n+1)\pi i}{2K} = \frac{\theta'(\omega)}{\theta(\omega)} - \frac{\lambda A_m}{R_{m-1}}$$

et par suite dans le cas de n pair et égal à $2m$ on aura pour l'équation que nous considérons (où $n_1 = n_2 = n_3 = 0$) en vertu des formules (24), (25), (29) et (30) l'intégrale générale qui sera donnée par la formule

$$\begin{aligned}(48)\quad & \operatorname{dn}^{\nu} x \operatorname{cn}^{\nu_1} x \operatorname{sn}^{\nu_2} x \Bigg[A[\lambda\varphi(\operatorname{sn}^2 x) - \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \psi(\operatorname{sn}^2 x)] \frac{\Theta(x)}{H(x+\omega)} e^{\left[\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} - \frac{\lambda A_m}{R_{m-1}}\right] x} + \\ & + B[\lambda\varphi(\operatorname{sn}^2 x) + \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \psi(\operatorname{sn}^2 x)] \frac{\Theta(x)}{H(x-\omega)} e^{-\left[\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} - \frac{\lambda A_m}{R_{m-1}}\right] x} \Bigg]\end{aligned}$$

formule dans laquelle tout est maintenant connu.

2° n impair $\qquad n = 2m - 1$

On aura en remarquant que dans ce cas $\psi(x)$ est de degré $m - 2$, et multipliant haut et bas dans le 2^e membre de (46) par $k^{2m} \operatorname{sn}^{2m} x$

$$\frac{\Theta(x+a_1)\Theta(x+a_2) \ldots\ldots \Theta(x+a_n)\Theta(x-\omega)}{\Theta(x-a_1)\Theta(x-a_2) \ldots\ldots \Theta(x-a_n)\Theta(x+\omega)} e^{-\frac{(n+1)\pi i}{K} x} =$$

$$= (-1)^{(n+1)} \frac{\lambda\varphi_1(k^2 \operatorname{sn}^2 x) - k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \psi_1(k^2 \operatorname{sn}^2 x)}{\lambda\varphi_1(k^2 \operatorname{sn}^2 x) + k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \psi_1(k^2 \operatorname{sn}^2 x)},$$

en prenant la dérivée logarithmique de cette expression et y faisant $x = 0$, on aura

$$2\sum_1^n \frac{\Theta'(a_i)}{\Theta(a_i)} - 2\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} - \frac{(n+1)\pi i}{K} = -2\frac{k^2\psi_1(0)}{\lambda\varphi_1(0)}$$

C'est à dire

$$(49)\qquad \frac{C}{2} - \frac{(n+1)\pi i}{2K} = \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} - \frac{k^2 R_{m-2}}{\lambda A_m}$$

et par suite dans le cas de n impair l'intégrale générale de l'équation (1) où l'on suppose $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ c'est à dire de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left[2\nu\frac{k^2\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x}+2\nu_1\frac{\operatorname{sn}x\operatorname{dn}x}{\operatorname{cn}x}-2\nu_2\frac{\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x}{\operatorname{sn}x}\right]\frac{dy}{dx}=$$

$$=\left[\frac{-1}{\operatorname{sn}^2x}\nu_2(\nu_2+1)-\frac{\operatorname{dn}^2x}{\operatorname{cn}^2x}\nu_1(\nu_1+1)-\frac{k^2\operatorname{cn}^2x}{\operatorname{dn}^2x}\nu(\nu+1)+k^2\operatorname{sn}^2x(n+\nu+\nu_1+\nu_2)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot(n-\nu-\nu_1-\nu_2+1)+h\right]y$$

sera

$$(50)\quad \operatorname{dn}^{\nu}x\operatorname{cn}^{\nu_1}x\operatorname{sn}^{\nu_2}x\left[A[\lambda\varphi(\operatorname{sn}^2x)-\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x\psi(\operatorname{sn}^2x)]\frac{\Theta(x)}{H(x+\omega)}e^{\left[\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}-\frac{k^2R_{m-2}}{\lambda A_m}\right]x}+\right.$$

$$\left.+B[\lambda\varphi(\operatorname{sn}^2x)+\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x\psi(\operatorname{sn}^2x)]\frac{\Theta(x)}{H(x-\omega)}e^{-\left[\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}-\frac{k^2R_{m-2}}{\lambda A_m}\right]x}\right]$$

Je ferai remarquer que le résultat auquel nous sommes arrivés pour le cas où $n_1=n_2=n_3=0$ s'appliquerait presque sans changement si trois quelconques des quantités n, n_1, n_2, n_3 étaient nulles, il suffirait dans les équations (12) de considérer au lieu de $\operatorname{sn}^2 a_i$ l'une des quantités $\operatorname{sn}^2(a_i+K)$, $\operatorname{sn}^2(a_i+iK')$, $\operatorname{sn}^2(a_i+K+iK')$, suivant le cas, et alors les équations qui s'appliquent au cas présent prendraient la forme de celles dont nous sommes partis pour le cas de $n_1=n_2=n_3=0$.

Dans un prochain mémoire nous nous proposerons de résoudre pour le cas de $n_2=n_3=0$ les problèmes que nous avons résolus pour le cas précédent; et nous reviendrons ensuite à l'examen du cas général.(¹)

Chateau de Vallière 15 Mars 1883.

(¹) Une grande partie des résultats auxquels nous sommes arrivés dans ce premier mémoire avait déjà été obtenu, par d'autres méthodes pour l'équation de Lamé.

En dehors des beaux travaux de M. Hermite sur ce sujet, dont nous avons parlé en commençant, et de ceux qu'il avait déjà donné dans son cours lithographié de l'école Polytechnique; nous devons citer les remarquables résultats obtenus par M. Brioschi et publiés dans les tomes 9 et 10 des Annali di Matematica ainsi que dans deux notes parues dans les tomes 91 et 92 des comptes rendus de l'académie des sciences de Paris.

En particulier, dans la note publiée dans le tome 92 des comptes rendus, l'éminent analyste donne une formule récurrente, analogue à la formule (23) qui permet de calculer

de proche en proche les coefficients de $f(x)$. Toutefois cette formule contient quatre coefficients consécutifs de $f(x)$ tandis que la relation (23) n'en contient que trois.

Nous ferons remarquer de plus que la relation (21) dont nous avons déduit la formule (23) ne diffère pas au fond de l'équation différentielle du troisième ordre à laquelle satisfait le produit de deux intégrales particulières de l'équation différentielle du second ordre, équation donnée par M. Brioschi dans le tome 9 des Annali di Matematica et antérieurement par M. Hermite, mais les méthodes employées par les deux savants géomètres ne nous auraient pas fourni les relations (15).

Or ces relations nous étaient nécessaires, premièrement pour fixer la concordance des signes entre les quantités a lorsque l'on prend l'intégrale sous sa première forme, et ensuite pour nous permettre de passer de cette forme à celle sous laquelle nous l'avons mise en dernier lieu.

SUR LES COUCHES DE NIVEAU
ÉLECTROMAGNÉTIQUES

PAR

E. BELTRAMI

à PAVIE.

Tout le monde connaît les élégantes propriétés des surfaces et des couches de niveau par rapport aux masses agissant d'après la loi de NEWTON, ainsi que la belle application que ces propriétés reçoivent dans l'étude des systèmes ellipsoïdaux.

Des propriétés tout-à-fait analogues ont lieu par rapport aux actions électromagnétiques. Dès 1872, dans une courte note insérée au *Nuovo Cimento,* j'ai indiqué des systèmes de courants, auxquels j'ai donné le nom (qui peut-être n'a pas été parfaitement bien choisi) de *solenoïdes neutres,* et qui présentent des analogies très-frappantes avec les couches de niveau. J'ai montré, un peu plus tard (en 1874), dans des *Recherches sur la cinématique des fluides,* que l'on rencontre une application très-simple de ces systèmes chez les surfaces de second ordre: seulement ces surfaces ne sont pas, cette fois, des ellipsoïdes, mais des hyperboloïdes à une nappe.

J'ai quelque raison de croire que la connaissance de ces propriétés n'est pas aussi généralement répandue qu'elle pourrait l'être. C'est pourquoi je prends la permission d'en présenter un exposé succinct aux lecteurs de ce Journal, d'autant plus que des recherches postérieures me permettent d'en abréger considérablement la démonstration. Je m'étais d'abord servi du théorème de GREEN, et ce procédé est sans doute le plus naturel et le plus direct, lorsque l'on tient compte d'une remarque due à M. W. THOMSON (*Reprint,* § 515). Mais les fonctions qu'il faut considérer n'étant

pas, en général, monodromes, l'emploi de ce théorème exige, comme on sait d'après M. Helmholtz, quelques modifications qui compliquent un peu les raisonnements. Je suivrai donc une autre voie, en m'appuyant sur les formules qui servent à définir les systèmes de courants dont l'action extérieure est la même que celle d'un corps magnétique donné. J'ai eu tout récemment l'occasion d'établir ces formules d'une manière rigoureuse, dans une *Note* communiquée à l'Institut Royal de Milan (séance du 12 Avril 1883).

Je vais d'abord rappeler ces formules, ainsi que les conventions sur lesquelles elles reposent.

Soit S l'espace occupé par un corps magnétique et soient α, β, γ trois fonctions monodromes, continues et finies des coordonnées x, y, z, représentant les composantes suivant les axes du moment magnétique (rapporté à l'unité de volume) au point (x, y, z) de l'espace S. L'action que le corps exerce sur un point extérieur quelconque est identique, comme on sait d'après Ampère, à l'action électromagnétique exercée, sur ce même point, par un certain système de courants constants et fermés qui circulent en partie dans l'espace S, en partie sur la surface σ qui termine cet espace. Pour définir complètement ce système il faut connaître les composantes u, v, w de l'intensité spécifique (de volume) en tout point (x, y, z) de l'espace S et les composantes $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ de l'intensité spécifique (de superficie) en tout point (x, y, z) de la surface σ. Or ces six quantités sont données en fonction des composantes α, β, γ du moment magnétique par les formules très-simples

$$(1) \qquad u = \frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial z}, \qquad w = \frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x},$$

$$(1)_a \qquad \boldsymbol{u} = \beta\frac{\partial z}{\partial n} - \gamma\frac{\partial y}{\partial n}, \qquad \boldsymbol{v} = \gamma\frac{\partial x}{\partial n} - \alpha\frac{\partial z}{\partial n}, \qquad \boldsymbol{w} = \alpha\frac{\partial y}{\partial n} - \beta\frac{\partial x}{\partial n},$$

où n est la normale intérieure à la surface σ (voir le *Reprint* de Thomson, § 554, ou la *Note* citée ci-dessus).

Il est commode de transformer les trois dernières formules. On a d'abord

$$(2) \qquad \boldsymbol{u}\frac{\partial x}{\partial n} + \boldsymbol{v}\frac{\partial y}{\partial n} + \boldsymbol{w}\frac{\partial z}{\partial n} = 0,$$

relation dont la nécessité découle de la définition même des quantités $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$. Menons, ensuite, par le point (x, y, z) de la surface deux éléments linéaires orthogonaux ds, $d\nu$ de cette surface, de telle manière que les trois directions ds, $d\nu$, dn soient congruentes à celles des axes positifs des x, y, z. On tire alors des équations $(1)_a$

$$\boldsymbol{u}\frac{\partial x}{\partial \nu} + \boldsymbol{v}\frac{\partial y}{\partial \nu} + \boldsymbol{w}\frac{\partial z}{\partial \nu} + \alpha\frac{\partial x}{\partial s} + \beta\frac{\partial y}{\partial s} + \gamma\frac{\partial z}{\partial s} = 0,$$

et l'on reconnaît très-aisément que les quantités $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$, assujetties à la condition (2), ne peuvent satisfaire à cette dernière équation, quel que soit le couple orthogonal $(ds, d\nu)$, qu'en prenant les valeurs $(1)_a$. La dernière équation peut être encore simplifiée. Soit $\boldsymbol{j}$ l'intensité spécifique dont $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ sont les composantes suivant les axes, et soit $\boldsymbol{j}_\nu$ la composante de cette même intensité suivant une direction quelconque ν: on peut alors écrire

$$(2)_a \qquad \boldsymbol{j}_\nu ds + \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0,$$

où dx, dy, dz sont les composantes, suivant les axes, de l'élément linéaire ds, et où ν indique la direction de l'élément linéaire normal à ds, dans le sens précis qui a été indiqué ci-dessus.

Cela posé, nous considérerons une distribution de magnétisme très-particulière. On sait déjà par Poisson que lorsque les composantes du moment magnétique satisfont aux conditions

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0 \qquad \text{en tout point de } S,$$

$$\alpha\frac{\partial x}{\partial n} + \beta\frac{\partial y}{\partial n} + \gamma\frac{\partial z}{\partial n} = 0 \qquad \text{» » » » } \sigma,$$

la fonction potentielle magnétique est partout nulle. Mais nous supposerons, *en outre*, qu'il existe une fonction φ des points de S, telle que l'on ait

$$(3) \qquad \alpha = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \beta = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \gamma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

et que l'on ait aussi, par conséquent,

$$(3)_a \qquad \Delta_2\varphi = 0 \qquad \text{en tout point de } S,$$

$$(3)_b \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \qquad \text{» » » » } \sigma.$$

Les égalités (3) exigent que les premières dérivées de φ soient monodromes, continues et finies en tous les points de S. Si donc on veut pouvoir satisfaire en même temps aux conditions $(3)_a$, $(3)_b$, sans que φ devienne $=$ *Const.*, il faut supposer que l'espace S soit infini, ou, s'il est fini, qu'il ne soit pas simplement connexe; et, dans ce second cas, il faut que la fonction φ ne soit pas monodrome dans cet espace. Cette fonction peut, en effet, être envisagée comme le potentiel des vitesses d'un liquide incompressible, mobile dans l'espace S. (Pour fixer les idées, il est bon d'avoir en vue le cas simple d'un espace S fini et doublement connexe, c'est à dire d'une surface σ tubulaire et rentrante.)

Les équations (1) donnent $u = v = w = 0$, d'où il suit qu'il n'y a pas de courants dans l'espace S. L'équation $(2)_a$ donne de son côté

$$(3)_c \qquad \boldsymbol{j}_\nu ds = \frac{d\varphi}{4\pi},$$

d'où il suit $\boldsymbol{j}_\nu = 0$ pour $d\varphi = 0$: il n'y a donc de courants que sur la surface σ et ces courants circulent le long des lignes d'intersection de cette surface avec les surfaces $\varphi =$ *Const.* Si la direction ν est celle du courant, on a, pour l'intensité vraie du courant qui circule dans la bande comprise entre les deux lignes contigües $\varphi =$ *Const.*, $\varphi + d\varphi =$ *Const.*,

$$\boldsymbol{j} ds = \frac{d\varphi}{4\pi}.$$

On peut dire aussi que l'intensité spécifique $\boldsymbol{j}$ est donnée par la formule

$$(3)_d \qquad \boldsymbol{j} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial N},$$

où N est la normale aux surfaces $\varphi =$ *Const.*, de sorte que cette intensité $\boldsymbol{j}$ a la même expression, au signe près, que la densité d'une couche de niveau sur une de ces surfaces. D'une manière ou d'autre, on voit que

la fonction φ régit la marche aussi bien que l'intensité de tous les courants du système.

De l'équivalence de ce système avec le corps magnétique on conclut immédiatement que l'action des courants est nulle au dehors de l'espace S. Pour calculer cette action dans l'espace S lui-même, il suffit de se rappeler qu'à l'intérieur d'un corps magnétique les composantes de la force, suivant la définition dite *électromagnétique,* sont données par les dérivées négatives de la fonction potentielle (qui est nulle dans notre cas) augmentées respectivement de $4\pi\alpha$, $4\pi\beta$, $4\pi\gamma$. Cette force n'est d'ailleurs autre chose que celle due au système de courants équivalents: donc (3) les composantes cherchées sont

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

On peut maintenant écarter tout à fait la considération du corps magnétique et envisager φ comme fonction potentielle électromagnétique de courants existant en dehors de l'espace S. On a alors le théorème suivant, dans l'énoncé duquel on a rétabli la généralité des hypothèses essentielles:

Soit φ la fonction potentielle électromagnétique d'un système Γ de courants et soit σ une surface, lieu géométrique de lignes de force extérieures relatives à ces courants, et partageant l'espace infini en deux régions, S et S', dont la première ne renferme aucune partie de Γ. Si l'on fait parcourir cette surface par un système de courants (solenoïde neutre), *dont l'intensité spécifique* (de superficie) *soit*

$$j = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial N},$$

N étant la normale aux surfaces φ = Const., l'action électromagnétique de ce système est nulle dans tout l'espace S' et est identique, dans tout l'espace S, à celle du système primitif Γ.

On peut ajouter que l'intensité *totale* du solénoïde est égale à celle du système Γ, lorsque les lignes de force dont σ est le lieu géométrique entourent *tous* les courants de ce système.

L'analogie de ces énoncés avec ceux qui se rapportent aux couches de niveau ordinaires est évidente. Cette analogie paraît encore plus

complète si l'on tient compte d'une propriété importante établie dès 1870 par M. Boltzmann (Journal de Borchardt, t. 73) relativement au potentiel d'un solénoïde neutre sur lui-même, potentiel qui est exprimé par

$$-\frac{1}{8\pi}\int {}_1\varphi \,.\, dS.$$

On peut encore généraliser le théorème précédent, de manière à comprendre le cas qui a été considéré par M. Bertrand par rapport aux distributions de masse ordinaires. On trouve alors que si le solénoïde orthogonal sépare deux parties, Γ_S et $\Gamma_{S'}$, du système Γ, son action en S est égale à celle de la partie $\Gamma_{S'}$, tandis que son action en S' est égale et contraire à celle de la partie Γ_S. (Cette différence de signes est naturellement subordonnée au choix que l'on a fait du sens des courants du solénoïde.)

Considérons un exemple très-simple. Supposons que le système Γ se réduise à un seul courant rectiligne et indéfini, auquel cas les surfaces $\varphi = Const.$ sont des plans menés par cet *axe*. Toute surface de révolution autour de ce même axe peut jouer le rôle de surface σ, pourvu que la ligne méridienne ne coupe pas l'axe et soit une courbe fermée ou à branches infinies. Les courants de ce solénoïde étant distribués uniformément le long des lignes méridiennes et leur intensité totale étant égale à celle du courant *axial,* l'action du solénoïde dans l'espace annulaire est identique à celle de ce courant. Par conséquent, s'il existe, dans cet espace annulaire, une masse de fer doux, l'induction magnétique exercée sur cette masse par le solénoïde est nécessairement la même que si, le solénoïde étant supprimé, la masse était exposée à l'action du courant axial de même intensité. D'après cela, lorsque la masse de fer doux a elle-aussi la forme d'un anneau de révolution autour de l'axe (la section étant quelconque), sa surface devient un lieu de lignes de force inductrices. Or chaque fois que la surface d'un corps magnétique isotrope est un lieu de lignes de force inductrices, la solution du problème d'induction est immédiatement donnée par la seule inspection de l'équation fondamentale de Poisson (la magnétisation induite rentre alors dans le type (3), $(3)_a$, $(3)_b$, où φ est *proportionnelle* à la fonction potentielle des forces inductrices extérieures). On est ramené ainsi, dans le cas très-particulier de l'anneau

de révolution, au résultat que M. KIRCHHOFF a établi par le calcul direct (*Gesammelte Abhandlungen*, p. 226). (¹)

Voyons maintenant l'application que l'on peut faire des propriétés précédemment établies aux surfaces de second ordre.

Désignons pas u, v, w les trois racines réelles de l'équation en λ

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1,$$

en supposant

$$\infty > u > -c^2 > v > -b^2 > w > -a^2;$$

et posons

$$U=\int_{-c^2}^{u}\frac{du}{\sqrt{F(u)}},\qquad V=\int_{-b^2}^{v}\frac{dv}{\sqrt{-F(v)}},\qquad W=\int_{-a^2}^{w}\frac{dw}{\sqrt{F(w)}},$$

où

$$F(\lambda)=(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda).$$

Nous fixerons tout-à-l'heure le signe des radicaux sous les intégrales U, V, W: en attendant, nous désignerons par H, I, K les valeurs absolues de ces trois intégrales, lorsque les variables u, v, w y atteignent leurs limites supérieures (respectives) ∞, $-c^2$, $-b^2$.

On sait que l'élément linéaire de l'espace est donné, en u, v, w, par l'équation

$$4ds^2=(u-v)(u-w)dU^2+(u-v)(v-w)dV^2+(u-w)(v-w)dW^2,$$

d'où l'on tire

$$\Delta_1 U=\frac{4}{(u-v)(u-w)},\quad \Delta_1 V=\frac{4}{(u-v)(v-w)},\quad \Delta_1 W=\frac{4}{(u-w)(v-w)}.$$

(¹) Il n'est pas inutile de remarquer qu'il y a deux cas généraux où le problème de l'induction magnétique admet une solution immédiate. Le premier est celui où la surface qui termine le corps est de niveau par rapport aux forces inductrices: c'est le cas qui a servi à M. THOMSON pour expliquer les résultats de FARADAY au sujet de l'induction électrostatique. Le second est celui dont il est question ci-dessus.

De ces dernières expressions on conclut, comme on sait, que les dérivées des fonctions U, V, W par rapport à x, y, z sont finies partout, excepté le long de l'ellipse focale, pour U, de l'hyperbole focale, pour V, et de ces deux lignes à la fois, pour W. Les dérivées secondes de ces trois fonctions satisfont aux équations

$$\Delta_2 U = 0, \qquad \Delta_2 V = 0, \qquad \Delta_2 W = 0$$

partout où elles sont finies.

D'après cela, si on considère un des hyperboloïdes à une nappe, que nous désignerons par σ et qui sera défini par une valeur particulière v_0 de v, et si, pour distinguer entre elles les deux régions de l'espace qui sont séparées par cette surface, l'on indique par S celle où se trouve le centre et par S' la région annulaire extérieure, on voit que les dérivées

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z}$$

sont finies en tout point de S et que les dérivées

$$\frac{\partial W}{\partial x}, \quad \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \frac{\partial W}{\partial z}$$

sont finies en tout point de S'.

Pour que les dérivées de U deviennent aussi *continues* en S, il suffit de changer le signe au radical $\sqrt{F(u)}$ chaque fois que le point (x, y, z) traverse le plan $z = 0$, où ce radical s'annule. De même, pour que les dérivées de W deviennent aussi continues en S', il suffit de changer le signe au radical $\sqrt{F(w)}$ chaque fois que le point (x, y, z) traverse les deux plans $x = 0$, $y = 0$, où ce radical s'annule. Afin de satisfaire à ces deux conditions, nous conviendrons de donner toujours au radical $\sqrt{F(u)}$ le même signe que z et au radical $\sqrt{F(w)}$ le signe contraire à celui du produit xy. Par ces conventions, lorsque le point (x, y, z) ira de $z = -\infty$ à $z = +\infty$ par un chemin quelconque en S, la fonction *monodrome* U passera avec continuité de la valeur $-H$ à la valeur $+H$; et lorsque le point (x, y, z) décrira en S' un chemin fermé autour de l'hyperboloïde (v_0), la fonction *polidrome* W passera avec continuité de la valeur W, qu'elle possédait au point de départ, à la valeur $W + 4K$

qu'elle prendra au même point, après le tour complet (en sens positif). Par ces mêmes conventions, si l'on désigne par s l'arc de l'une quelconque des courbes à branches infinies

$$v = Const., \qquad w = Const.,$$

qui existent dans l'espace S, et par s' l'arc de l'une quelconque des courbes fermées

$$u = Const., \qquad v = Const.,$$

qui existent en S', on aura

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{2}{\sqrt{(u-v)(u-w)}}, \qquad \frac{\partial W}{\partial s'} = \frac{2}{\sqrt{(u-w)(v-w)}}$$

(radicaux toujours positifs), les arcs s et s' croissant dans les sens indiqués ci-dessus. On voit donc que ces dérivées, ainsi que celles prises par rapport à x, y, z (que l'on déduit immédiatement des précédentes), sont bien réellement monodromes, continues et finies dans les espaces (respectifs) S et S', et qu'elles deviennent, à l'infini, infiniment petites du second ordre par rapport à l'inverse du rayon vecteur.

(On peut faire des considérations tout-à-fait analogues sur la fonction V, qui est de l'espèce de W.)

Les fonctions U et W étant définies de la sorte, rien ne s'oppose désormais à ce que nous considérions ces fonctions comme des cas particuliers de celle que nous avions désignée par φ, c'est à dire que nous prenions $\varphi = U$, par rapport à l'espace S, et $\varphi = W$, par rapport à l'espace S'. On a alors sur l'hyperboloïde σ deux systèmes de courants et on peut immédiatement énoncer les théorèmes suivants:

Si les lignes de courbure elliptiques de l'hyperboloïde à une nappe (v_0) *sont parcourues par des courants, avec l'intensité spécifique*

$$j = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial N},$$

où N est la normale aux ellipsoïdes, l'action électromagnétique de ce système de courants est nulle dans l'espace S' et a la fonction potentielle U (à une constante près) dans l'espace S.

Si les lignes de courbure hyperboliques du même hyperboloïde sont parcourues par des courants, avec l'intensité spécifique

$$j = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial W}{\partial N},$$

où N est la normale aux hyperboloïdes à deux nappes, l'action électromagnétique de ce second système de courants est nulle dans l'espace S et a la fonction potentielle W (à une constante près) dans l'espace S'.

On peut considérer U comme la fonction potentielle de courants $I'_{S'}$ existant dans l'espace S' et W comme la fonction potentielle de courants I'_S existant dans l'espace S. Ces courants peuvent prendre, évidemment, des dispositions très-variées. On peut, par exemple, concevoir $I'_{S'}$ comme étant formé de courants disposés suivant les lignes de courbure elliptiques d'un hyperboloïde à une nappe au paramètre $v > v_0$, ou même, à la limite, suivant les ellipses du plan $z = 0$ homofocales et extérieures à l'ellipse focale: la loi de distribution de ces courants serait la même que pour ceux de l'hyperboloïde (v_0); seulement il faudrait, dans le cas limite, en doubler l'intensité. On peut, par la même raison, concevoir I'_S comme étant formé de courants disposés suivant les lignes de courbure hyperboliques d'un hyperboloïde à une nappe au paramètre $v < v_0$, ou même, à la limite, suivant les hyperboles du plan $y = 0$ homofocales et intérieures à l'hyperbole focale (avec les mêmes remarques touchant la loi de distribution).

Si on fait coexister, sur un même hyperboloïde (v_0), les deux systèmes de courants qui circulent le long des lignes de courbure, on obtient un nouveau système, dont les courants parcourent les lignes

$$\varphi = U + W = Const.$$

ou les lignes

$$\varphi = U - W = Const.,$$

suivant le sens des deux systèmes composants. Il est facile de voir que ces lignes ne sont autres que les génératrices rectilignes de l'hyperboloïde (ce qui n'est qu'une forme particulière du théorème d'addition). L'intensité

du courant composé qui parcourt la bande comprise entre deux génératrices contigües est donnée par la formule générale

$$\frac{d\varphi}{4\pi};$$

mais on peut aussi exprimer l'intensité spécifique au moyen de la troisième fonction V, que nous n'avons pas encore mise en oeuvre. En effet l'élément linéaire de l'hyperboloïde étant donné par l'équation

$$4ds^2 = (u - w)\{(u - v_0)dU^2 + (v_0 - w)dW^2\},$$

la condition d'orthogonalité de deux éléments ds, ∂s du même hyperboloïde est

$$(u - v_0)dU\partial U + (v_0 - w)dW\partial W = 0.$$

Si le second élément appartient à l'une des génératrices rectilignes, savoir si l'on a $\partial U \pm \partial W = 0$, cette condition se réduit à

$$(u - v_0)dU \mp (v_0 - w)dW = 0.$$

De cette équation et de $dU \pm dW = d\varphi$ on tire

$$dU = \frac{v_0 - w}{u - w}d\varphi, \qquad dW = \pm\frac{u - v_0}{u - w}d\varphi,$$

et, par suite, la distance normale ds des deux génératrices φ et $\varphi + d\varphi$, au point considéré, est donnée par

$$4ds^2 = (u - v_0)(v_0 - w)d\varphi^2,$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 = \triangle_1 V.$$

L'intensité spécifique des courants rectilignes peut donc s'exprimer, abstraction faite du signe (que l'on détermine aisément d'après les conventions), par

$$j = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial N},$$

où N est la normale à l'hyperboloïde (v_0).

Ainsi l'on a cet autre théorème:

Le système des courants qui parcourent les génératrices rectilignes, d'une même famille, de l'hyperboloïde (v_0), *avec l'intensité spécifique*

$$j = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial N},$$

où N est la normale à cette même surface, a, dans l'espace S, la fonction potentielle U (à une constante et au signe près) *et, dans l'espace S', la fonction potentielle W* (à une constante et au signe près).

Le choix des signes de U et de W dépend du sens des courants rectilignes (nous omettons la discussion de ces signes, qui n'offre aucune difficulté).

On reconnaît aisément que ce dernier théorème n'est qu'un cas particulier de celui que nous avions énoncé pour le cas où la surface σ sépare le système Γ en deux parties. Sous ce point de vue Γ_S et $\Gamma_{S'}$ pourraient être, par exemple, les deux couches focales (électromagnétiques).

D'après ce qui précède, les lignes de courbure et les lignes asymptotiques de l'hyperboloïde à une nappe reçoivent une application électromagnétique très-simple. Dans cette application toutes les racines de l'équation cubique bien connue trouvent leur emploi, tandis qu'une seule de ces racines figure dans les applications qui se rattachent à la théorie du potentiel ordinaire.

SUR LA TRANSFORMATION

DES

FONCTIONS HYPERELLIPTIQUES DE PREMIER ORDRE

PAR

MARTIN KRAUSE

A ROSTOCK.

Des travaux de M. Hermite et d'autres savants sur la transformation des fonctions hyperelliptiques de premier ordre, il résulte qu'on peut représenter les fonctions théta transformées pour une transformation quelconque du $n^{\text{ème}}$ degré, abstraction faite d'un facteur commun, comme des fonctions entières des fonctions primitives théta, du $n^{\text{ème}}$ degré, et contenant un certain nombre de constantes linéairement. Brioschi a donné une détermination de ces constantes. Nous ferons remarquer dans la suite une autre méthode de détermination au moyen de laquelle ces constantes deviennent des fonctions rationnelles des fonctions théta, soit primitives, soit transformées, quand les arguments prennent la valeur zéro. L'avantage de cette méthode, c'est qu'elle donne en même temps le moyen de déduire autant de rapports modulaires que l'on veut pour un degré quelconque de transformation.

Nous nous bornons ici au cas d'une transformation impaire, car le cas d'une transformation paire n'offre, en principe, aucune particularité. Nous aurons alors le droit de nous borner aux représentants qui appartiennent à la transformation proposée. Ces représentants devront être convenablement choisis. Enfin, nous signalerons quelques rapports qui existent entre ces théories et la théorie des nombres.

§ 1.

Nous rapprocherons d'abord certaines formules de la théorie des fonctions théta, qui serviront beaucoup dans la suite. D'après la forme sous laquelle KOENIGSBERGER, dans le 64^e volume du Journal de CRELLE, a représenté le théorème de l'addition des fonctions théta, on obtient immédiatement les relations suivantes:

$$\vartheta_5\vartheta_0\vartheta_5^2(v_1, v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_0(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_i} = \vartheta_{01}\vartheta_1'(v_i)_0\vartheta_1(v_1, v_2)\vartheta_{01}(v_1, v_2) + \vartheta_{03}\vartheta_3'(v_i)_0\vartheta_3(v_1, v_2)\vartheta_{03}(v_1, v_2).$$

$$\vartheta_4\vartheta_{14}\vartheta_5^2(v_1, v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_1(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_i} = \vartheta_{23}\vartheta_{04}'(v_i)_0\vartheta_0(v_1, v_2)\vartheta_{01}(v_1, v_2) - \vartheta_{03}\vartheta_{24}'(v_i)_0\vartheta_2(v_1, v_2)\vartheta_{12}(v_1, v_2).$$

$$\vartheta_5\vartheta_2\vartheta_5^2(v_1, v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_2(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_i} = -\vartheta_{12}\vartheta_1'(v_i)_0\vartheta_1(v_1, v_2)\vartheta_{12}(v_1, v_2) + \vartheta_{23}\vartheta_3'(v_i)_0\vartheta_3(v_1, v_2)\vartheta_{23}(v_1, v_2). \tag{1}$$

$$\vartheta_2\vartheta_{23}\vartheta_5^2(v_1, v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_3(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_i} = \vartheta_{14}\vartheta_{02}'(v_i)_0\vartheta_0(v_1, v_2)\vartheta_{03}(v_1, v_2) + \vartheta_{01}\vartheta_{21}'(v_i)_0\vartheta_4(v_1, v_2)\vartheta_{34}(v_1, v_2).$$

$$\vartheta_5\vartheta_4\vartheta_5^2(v_1, v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_4(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_i} = -\vartheta_{14}\vartheta_1'(v_i)_0\vartheta_1(v_1, v_2)\vartheta_{14}(v_1, v_2) - \vartheta_{34}\vartheta_3'(v_i)_0\vartheta_3(v_1, v_2)\vartheta_{34}(v_1, v_2).$$

$$\vartheta_5\vartheta_{01}\vartheta_5^2(v_1, v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{01}(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_i} = -\vartheta_0\vartheta_1'(v_i)_0\vartheta_1(v_1, v_2)\vartheta_0(v_1, v_2) - \vartheta_{0}\vartheta_{1}'(v_i)_0\vartheta_{1}(v_1, v_2)\vartheta_{0}(v_1, v_2).$$

$$\vartheta_2\vartheta_0\vartheta_5^2(v_1,\ v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{02}(v_1,\ v_2)}{\vartheta_5(v_1,\ v_2)}}{\partial v_i}=\vartheta_5\vartheta'_{02}(v_i)_0\vartheta_0(v_1,\ v_2)\vartheta_2(v_1,\ v_2)$$
$$-\vartheta_4\vartheta'_{13}(v_i)_0\vartheta_{04}(v_1,\ v_2)\vartheta_{24}(v_1,\ v_2).$$

$$\vartheta_5\vartheta_{03}\vartheta_5^2(v_1,\ v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{03}(v_1,\ v_2)}{\vartheta_5(v_1,\ v_2)}}{\partial v_i}=-\vartheta_0\vartheta'_3(v_i)_0\vartheta_3(v_1,\ v_2)\vartheta_0(v_1,\ v_2)$$
$$+\vartheta_{01}\vartheta'_{13}(v_i)_0\vartheta_{13}(v_1,\ v_2)\vartheta_{01}(v_1,\ v_2).$$

$$\vartheta_4\vartheta_0\vartheta_5^2(v_1,\ v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{04}(v_1,\ v_2)}{\vartheta_5(v_1,\ v_2)}}{\partial v_i}=\vartheta_5\vartheta'_{04}(v_i)_0\vartheta_0(v_1,\ v_2)\vartheta_4(v_1,\ v_2)$$
$$+\vartheta_2\vartheta'_{13}(v_i)_0\vartheta_{02}(v_1,\ v_2)\vartheta_{24}(v_1,\ v_2).$$

$$\vartheta_5\vartheta_{12}\vartheta_5^2(v_1,\ v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{12}(v_1,\ v_2)}{\vartheta_5(v_1,\ v_2)}}{\partial v_i}=\vartheta_2\vartheta'_1(v_i)_0\vartheta_1(v_1,\ v_2)\vartheta_2(v_1,\ v_2)$$
$$+\vartheta_{23}\vartheta'_{13}(v_i)_0\vartheta_{13}(v_1,\ v_2)\vartheta_{23}(v_1,\ v_2).$$

$$\vartheta_{03}\vartheta_{01}\vartheta_5^2(v_1,\ v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{13}(v_1,\ v_2)}{\vartheta_5(v_1,\ v_2)}}{\partial v_i}=-\vartheta_0\vartheta'_{24}(v_i)_0\vartheta_1(v_1,\ v_2)\vartheta_3(v_1,\ v_2) \tag{1}$$
$$+\vartheta_5\vartheta'_{13}(v_i)_0\vartheta_{01}(v_1,\ v_2)\vartheta_{03}(v_1,\ v_2).$$

$$\vartheta_5\vartheta_{14}\vartheta_5^2(v_1,\ v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{14}(v_1,\ v_2)}{\vartheta_5(v_1,\ v_2)}}{\partial v_i}=\vartheta_4\vartheta'_1(v_i)_0\vartheta_1(v_1,\ v_2)\vartheta_4(v_1,\ v_2)$$
$$-\vartheta_{34}\vartheta'_{13}(v_i)_0\vartheta_{13}(v_1,\ v_2)\vartheta_{34}(v_1,\ v_2).$$

$$\vartheta_5\vartheta_{23}\vartheta_5^2(v_1,\ v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{23}(v_1,\ v_2)}{\vartheta_5(v_1,\ v_2)}}{\partial v_i}=-\vartheta_2\vartheta'_3(v_i)_0\vartheta_3(v_1,\ v_2)\vartheta_2(v_1,\ v_2)$$
$$-\vartheta_{12}\vartheta'_{13}(v_i)_0\vartheta_{13}(v_1,\ v_2)\vartheta_{12}(v_1,\ v_2).$$

$$\vartheta_4\vartheta_2\vartheta_5^2(v_1,\ v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{24}(v_1,\ v_2)}{\vartheta_5(v_1,\ v_2)}}{\partial v_i}=\vartheta_5\vartheta'_{24}(v_i)_0\vartheta_2(v_1,\ v_2)\vartheta_4(v_1,\ v_2)$$
$$-\vartheta_0\vartheta'_{13}(v_i)_0\vartheta_{02}(v_1,\ v_2)\vartheta_{04}(v_1,\ v_2).$$

$$\vartheta_5\vartheta_{34}\vartheta_5^2(v_1,\ v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{34}(v_1,\ v_2)}{\vartheta_5(v_1,\ v_2)}}{\partial v_i}=\vartheta_4\vartheta'_3(v_i)_0\vartheta_3(v_1,\ v_2)\vartheta_4(v_1,\ v_2)$$
$$+\vartheta_{14}\vartheta'_{13}(v_i)_0\vartheta_{13}(v_1,\ v_2)\vartheta_{14}(v_1,\ v_2).$$

Les douze constantes $\vartheta'_\alpha(v_i)_0$ que l'on rencontre dans ces formules, ne sont pas toutes indépendantes l'une de l'autre, mais on a les relations:

$$\vartheta'_3(v_1)_0 = K_{21}\,\frac{\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_0\,.\,\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2\,.\,\vartheta_4^2\,.\,\vartheta_5^2}.$$

$$\vartheta'_3(v_2)_0 = K_{22}\,\frac{\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_0\,.\,\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2\,.\,\vartheta_4^2\,.\,\vartheta_5^2}.$$

$$\vartheta'_{21}(v_1)_0 = -K_{11}\,\frac{\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_0\,.\,\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5}.$$

$$\vartheta'_{21}(v_2)_0 = -K_{12}\,\frac{\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_0\,.\,\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5}.$$

$$\vartheta'_{01}(v_1)_0 = (K_{11} + K_{21})\,\frac{\vartheta_{14}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5}.$$

$$\vartheta'_{01}(v_2)_0 = (K_{22} + K_{12})\,\frac{\vartheta_{14}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5}.$$

(2)

$$\vartheta'_1(v_1)_0 = (K_{11} + k^2K_{21})\,\frac{\vartheta_5\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_0}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5}.$$

$$\vartheta'_1(v_2)_0 = (k^2K_{22} + K_{12})\,\frac{\vartheta_5\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_0}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5}.$$

$$\vartheta'_{02}(v_1)_0 = (K_{11} + \lambda^2K_{21})\,\frac{\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{14}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_4}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5}.$$

$$\vartheta'_{02}(v_2)_0 = (\lambda^2K_{22} + K_{12})\,\frac{\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{14}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_4}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5}.$$

$$\vartheta'_{13}(v_1)_0 = (K_{11} + \mu^2K_{21})\,\frac{\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_5\,.\,\vartheta_{34}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5}.$$

$$\vartheta'_{13}(v_2)_0 = (\mu^2K_{22} + K_{12})\,\frac{\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_5\,.\,\vartheta_{34}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5}.$$

Dans ces formules on a posé:

$$k^2 = \frac{\vartheta_{23}^2\,.\,\vartheta_{01}^2}{\vartheta_4^2\,.\,\vartheta_5^2}, \qquad \lambda^2 = \frac{\vartheta_2^2\,.\,\vartheta_{23}^2}{\vartheta_{34}^2\,.\,\vartheta_4^2}, \qquad \mu^2 = \frac{\vartheta_2^2\,.\,\vartheta_{01}^2}{\vartheta_5^2\,.\,\vartheta_{34}^2};$$

puis on a la relation:

$$(K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}) = \pi^2 \frac{\vartheta_{34}^3 \cdot \vartheta_4^3 \cdot \vartheta_5^3}{\vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{14}} = K.$$

Posons maintenant:

$$u_1 = K_{11}v_1 + K_{12}v_2,$$

$$u_2 = K_{21}v_1 + K_{22}v_2.$$

On tire de là réciproquement:

$$Kv_1 = K_{22}u_1 - K_{12}u_2,$$

$$Kv_2 = - K_{21}u_1 + K_{11}u_2.$$

Posons ensuite:

$$\frac{\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)} = \mathrm{al}_\alpha(u_1, u_2).$$

On tire de là:

$$K\frac{\partial\,\mathrm{al}_\alpha(u_1, u_2)}{\partial u_1} = K_{22}\frac{\partial\dfrac{\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_1} - K_{21}\frac{\partial\dfrac{\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_2},$$

$$K\frac{\partial\,\mathrm{al}_\alpha(u_1, u_2)}{\partial u_2} = - K_{12}\frac{\partial\dfrac{\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_1} + K_{11}\frac{\partial\dfrac{\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_2}.$$

Les deux grandeurs

$$\mathrm{al}_\alpha(u_1, u_2) \quad \text{et} \quad \frac{\partial\,\mathrm{al}_\alpha(u_1, u_2)}{\partial u_i}$$

peuvent être désignées, pour le cas particulier de $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, par al_α et $\mathrm{al}'_\alpha(u_i)_0$; il résulte alors de là que le système d'équations (1) ne change pas, quand on met al_α, $\mathrm{al}'_\alpha(u_i)_0$, $\mathrm{al}_\alpha(u_1, u_2)$ au lieu de

$$\vartheta_\alpha, \ \vartheta'_\alpha(v_i)_0, \ \vartheta_\alpha(v_1, v_2).$$

Mais alors on a:

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
&\mathrm{al}_3'(u_1)_0 = 0. && \mathrm{al}_3'(u_2)_0 = \frac{\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{23}\vartheta_2\vartheta_{03}\vartheta_0\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2\,.\,\vartheta_4^2\,.\,\vartheta_5^2}.\\
&\mathrm{al}_{24}'(u_1)_0 = -\frac{\vartheta_{03}\vartheta_{12}\vartheta_0\,.\,\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5^2}. && \mathrm{al}_{24}'(u_2)_0 = 0.\\
&\mathrm{al}_{04}'(u_1)_0 = \frac{\vartheta_{14}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5^2}. && \mathrm{al}_{04}'(u_2)_0 = \frac{\vartheta_{14}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5^2}.\\
&\mathrm{al}_1'(u_1)_0 = \frac{\vartheta_5\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_0}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5^2}. && \mathrm{al}_1'(u_2)_0 = k^2\frac{\vartheta_5\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_0}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5^2}.\\
&\mathrm{al}_{02}'(u_1)_0 = \frac{\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_4}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5^2}. && \mathrm{al}_{02}'(u_2)_0 = \lambda^2\frac{\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_4}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5^2}.\\
&\mathrm{al}_{13}'(u_1)_0 = \frac{\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_5\,.\,\vartheta_{34}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5^2}. && \mathrm{al}_{13}'(u_2)_0 = \mu^2\frac{\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_5\,.\,\vartheta_{34}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5^2}.
\end{aligned}
$$

De là on tire ce théorème bien connu que tous les quotients différentiels des fonctions $\mathrm{al}_\alpha(u_1, u_2)$, quand on ajoute les grandeurs al_α, peuvent s'exprimer d'une manière rationnelle par les grandeurs $\mathrm{al}_\alpha(u_1, u_2)$. Nous supposerons, dans la suite du présent travail, que l'on connaît ces expressions.

§ 2.

Nous passons maintenant à la transformation de $n^{\text{ème}}$ degré. Nous sommes donc autorisés à nous borner aux représentants de cette transformation. On peut les introduire de la manière suivante. Nous démontrons d'abord que chaque déterminant de transformation $(a_0b_1c_2d_3)$ est équivalent à un autre où tous les éléments à droite des membres en diagonale sont égaux à zéro.

En effet, si on désigne par k un nombre entier positif et qu'on pose:

$$
\begin{aligned}
&a_0^{k-1} = a_0^k l_k + a_0^{k+1}. && a_0^{k+1} = a_3^k. && a_0^0 = a_0. && a_3^0 = a_3\\
&b_0^{k-1} = b_0^k l_k + b_0^{k+1}. && b_0^{k+1} = b_3^k. && b_0^0 = b_0. && b_3^0 = b_3\\
&c_0^{k-1} = c_0^k l_k + c_0^{k+1}. && c_0^{k+1} = c_3^k. && c_0^0 = c_0. && c_3^0 = c_3\\
&d_0^{k-1} = d_0^k l_k + d_0^{k+1}. && d_0^{k+1} = d_3^k. && d_0^0 = d_0. && d_3^0 = d_3;
\end{aligned}
$$

alors, si on suppose en outre que k est un nombre pair, chaque déterminant de transformation devient égal à:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0^k & a_1 & a_2 & a_0^{k+1} \\ b_0^k & b_1 & b_2 & b_0^{k+1} \\ c_0^k & c_1 & c_2 & c_0^{k+1} \\ d_0^k & d_1 & d_2 & d_0^{k+1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l_k & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} l_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous choisissons maintenant les grandeurs l de manière que pour un k pair, on ait:

$$a_0^{k+1} = 0.$$

Cette détermination est toujours possible. En effet, choisissons d'abord les grandeurs l, de telle sorte que les grandeurs a_0^k diminuent quand k augmente, le développement est fini et il y aura un k pour lequel on a:

$$a_0^{k+1} = 0.$$

Si alors k est un nombre pair, le théorème est démontré vrai. Dans le cas contraire posons, au lieu des deux dernières équations:

$$a_0^{k-2} = a_0^{k-1} l_{k-1} + a_0^k$$
$$a_0^{k-1} = a_0^k l_k$$

les trois suivantes:

$$a_0^{k-2} = a_0^{k-1}(l_{k-1} - 1) + a_0^{k-1} + a_0^k$$
$$a_0^{k-1} = a_0^{k-1} + a_0^k - a_0^k$$
$$a_0^{k-1} + a_0^k = -a_0^k(-l_k - 1);$$

ce qui démontre le théorème même pour ce second cas.

Comme d'ailleurs on a:

$$\begin{vmatrix} l & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l' & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l_1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

il s'ensuit que:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0^k & a_1 & a_2 & 0 \\ b_0^k & b_1 & b_2 & b_3^k \\ c_0^k & c_1 & c_2 & c_3^k \\ d_0^k & d_1 & d_2 & d_3^k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & l_k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l_1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

On obtient ensuite immédiatement:

$$\begin{vmatrix} a_0^k & a_1 & a_2 & 0 \\ b_0^k & b_1 & b_2 & b_3^k \\ c_0^k & c_1 & c_2 & c_3^k \\ d_0^k & d_1 & d_2 & d_3^k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0^k & 0 & a_2 \\ b_1 & b_0^k & b_3^k & b_2 \\ c_1 & c_0^k & c_3^k & c_2 \\ d_1 & d_0^k & d_3^k & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous pouvons opérer avec le déterminant gauche sur le côté droit comme avec le déterminant primitif. On a alors:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0^k & 0 & a_2 \\ b_1 & b_0^k & b_3^k & b_2 \\ c_1 & c_0^k & c_3^k & c_2 \\ d_1 & d_0^k & d_3^k & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^s & a_0^k & 0 & 0 \\ b_1^s & b_0^k & b_3^k & b_2^s \\ c_1^s & c_0^k & c_3^k & c_2^s \\ d_1^s & d_0^k & d_3^k & d_2^s \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & l_s' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l_1' & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Des considérations tout à fait analogues montrent que, par un développement de fraction continue, de plus le déterminant gauche sur le côté droit peut être ramené à un autre où le premier élément de la première série horizontale est, seul, autre que zéro. On peut de même faire disparaître le troisième élément de la deuxième série horizontale. La vérité de notre assertion se trouve alors immédiatement démontrée à l'aide des équations conditionnelles que l'on a nécessairement entre les éléments d'un déterminant de transformation.

De là on tire, après quelques autres conclusions auxiliaires, le

Théorème. Tout déterminant (a_0, b_1, c_2, d_3) appartenant à une

transformation de $n^{\text{ème}}$ degré, est équivalent à un autre déterminant $(\alpha_0, \beta_1, \gamma_2, \delta_3)$ où les éléments à droite de la diagonale sont égaux à zéro, les éléments en diagonale positifs, et chacun des éléments qui restent absolument plus petit que l'élément diagonal correspondant, de telle sorte toutefois que $\beta_0, \gamma_0, \delta_0, \gamma_1$ sont positifs ou nuls. Enfin les éléments satisfont aux équations:

$$\begin{aligned} \gamma_0\delta_3 + \gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1 &= 0 \\ \beta_0\delta_3 + \beta_1\delta_2 \qquad\quad &= 0 \\ \alpha_0\delta_3 = \beta_1\gamma_2 \qquad\quad &= n. \end{aligned}$$

Deux transformations de l'espèce dont nous venons de parler ne peuvent jamais être équivalentes l'une à l'autre, sans être identiques. DORN démontre un théorème analogue dans le tome 7^e^ des *Mathematische Annalen.* Sa méthode est différente de celle que nous avons employée ici.

De là suit ce théorème:

Théorème. Si on décompose le degré de transformation n en ses facteurs premiers, sous la forme:

$$n = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_k^{\alpha_k}$$

et si on fait abstraction des classes où tous les nombres de transformation sont divisibles par un seul et même nombre, le nombre des représentants qui ne sont pas équivalents entre eux devient:

$$\prod_{r=1}^{k} \frac{a_r^{2\alpha_r-3}(1 + a_r^2)(a_r^{\alpha_r+2} + a_r^{\alpha_r-1} - a_r - 1)}{a_r - 1}.$$

Une simple observation suffit pour ramener la démonstration de ce théorème au cas où n est la puissance d'un nombre premier. Pour ce dernier cas il faut faire une démonstration analogue, comme l'a fait DORN dans le travail déjà cité.

Les résultats que nous venons d'obtenir sont exacts pour toutes les valeurs positives entières de n. Si n est un nombre impair, nous

poserons, au lieu des éléments à gauche des membres en diagonale, leurs produits par un seul et même multiple de huit.

Les représentants $(\alpha_0, \beta_1, \gamma_2, \delta_3)$ ainsi définis serviront de point de départ pour toutes les considérations qui vont suivre.

De même il résulte pour ces représentants, comme M. Hermite l'a démontré pour une transformation de nombres premiers, qu'il y a une équation de la forme:

$$(1)\quad \vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = \sum x_\varepsilon \vartheta_5(v_1, v_2)^{\varepsilon_1} \vartheta_1(v_1, v_2)^{\varepsilon_2} \vartheta_{02}(v_1, v_2)^{\varepsilon_3} \vartheta_{34}(v_1, v_2)^{\varepsilon_4}.$$

On a ici:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = n, \qquad \varepsilon_2 + \varepsilon_4 \equiv \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \equiv 0 \pmod 2, \qquad \varepsilon_4 < 4$$

$$v_1' = \alpha_0 v_1 + \beta_0 v_2, \qquad v_2' = \beta_1 v_2,$$

tandis qu'entre les grandeurs $\tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}', \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ on a les relations déjà connues.

Les grandeurs x_ε sont des constantes inconnues qui seront déterminées dans la suite.

En substituant des demi-périodes on tire de là les expressions correspondantes pour les 15 fonctions théta transformées qui restent, de la manière suivante:

$$\text{si on substitue} \quad v_1 + \frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{2} n_1 \tau_{11} + \frac{1}{2} n_2 \tau_{12} \quad \text{au lieu de } v_1$$

$$\text{et} \quad v_2 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} n_1 \tau_{12} + \frac{1}{2} n_2 \tau_{22} \quad \text{au lieu de } v_2$$

$\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$ prend la valeur $\varepsilon e^{ci\pi} \vartheta_\nu(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$, où ε est la quantité exponentielle qui s'ajoute à la $n^{\text{ème}}$ puissance de la fonction ϑ primitive,

$$c = -\frac{1}{2}(n_1^\nu m_1^\nu + n_2^\nu m_2^\nu) + \nu_1 m_1^\nu + \nu_2 m_2^\nu,$$

et où on a les relations:

$$\alpha_0 m_1 = 2\mu_1 + m_1^\nu, \qquad \delta_3 n_1 = 2\nu_1 + n_1^\nu,$$

$$\beta_1 m_2 = 2\mu_2 + m_2^\nu, \qquad \gamma_2 n_2 = 2\nu_2 + n_2^\nu.$$

Koenigsberger a donné ce résultat dans le tome 67 du Journal de Crelle. Nous obtenons ainsi un système d'équations, composé de 16 équations de la forme:

$$(2)\quad \vartheta_\alpha(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = \sum_\varepsilon x_\varepsilon i^{\eta_\varepsilon} \vartheta_{\eta_1}(v_1, v_2)^{\varepsilon_1} \vartheta_{\eta_2}(v_1, v_2)^{\varepsilon_2} \vartheta_{\eta_3}(v_1, v_2)^{\varepsilon_3} \vartheta_{\eta_4}(v_1, v_2)^{\varepsilon_4}.$$

Imaginons ces 16 équations divisées par $\vartheta_5(v_1, v_2)^n$, et mettons, sur le côté gauche, au lieu de $\vartheta_\alpha(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$:

$$\frac{\vartheta_\alpha(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}{\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')} \vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}').$$

On pourra alors mettre sur le côté droit $\mathrm{al}_\alpha(u_1, u_2)$ au lieu des quotients $\frac{\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}$. Posons ensuite:

$$\frac{\vartheta_\alpha(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}{\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')} = \mathrm{al}_\alpha(u_1', u_2', k', \lambda', \mu')$$

$$u_1' = c_{11}v_1' + c_{12}v_2',$$

$$u_2' = c_{21}v_1' + c_{22}v_2'.$$

On obtient alors des relations de la forme:

$$u_1' = M_0 u_1 + M_1 u_2,$$

$$u_2' = M_2 u_1 + M_3 u_3.$$

Pour les valeurs spéciales $u_1' = 0$, $u_2' = 0$ nous désignons les fonctions transformées par Al_α, les quotients différentiels par $\mathrm{Al}_\alpha'(u_i')_0$.

Les 16 équations de notre système peuvent alors toutes être mises sous la forme:

$$(3)\quad \mathrm{al}_\alpha(u_1', u_2', k', \lambda', \mu') \frac{\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}{\vartheta_5(v_1, v_2)^n}$$

$$= \sum_\varepsilon x_\varepsilon i^{\eta_\varepsilon} \mathrm{al}_{\eta_1}(u_1, u_2)^{\varepsilon_1} \mathrm{al}_{\eta_2}(u_1, u_2)^{\varepsilon_2} \mathrm{al}_{\eta_3}(u_1, u_2)^{\varepsilon_3} \mathrm{al}_{\eta_4}(u_1, u_2)^{\varepsilon_4}.$$

De ce système de 16 équations on peut déduire un autre système de 15 équations dont chacune a la forme:

$$(4)\quad \sum_{\varepsilon} x_{\varepsilon}[\mathrm{al}_{\alpha}(u_1', u_2', k', \lambda', \mu')\,\mathrm{al}_5(u_1, u_2)^{\varepsilon_1}\mathrm{al}_1(u_1, u_2)^{\varepsilon_2}\mathrm{al}_{02}(u_1, u_2)^{\varepsilon_3}\mathrm{al}_{34}(u_1, u_2)^{\varepsilon_4}$$

$$-\, i^{\gamma_{\varepsilon}}\mathrm{al}_{\gamma_1}(u_1, u_2)^{\varepsilon_1}\mathrm{al}_{\gamma_2}(u_1, u_2)^{\varepsilon_2}\mathrm{al}_{\gamma_3}(u_1, u_2)^{\varepsilon_3}\mathrm{al}_{\gamma_4}(u_1, u_2)^{\varepsilon_4}] = 0.$$

Imaginons, dans ces deux systèmes d'équations, les grandeurs $\mathrm{al}_{\gamma}(u_1, u_2)$ développées d'après les puissances de u_1 et u_2. D'après les observations faites dans le paragraphe premier, les coefficients, dans ce développement, sont des fonctions rationelles de ϑ_{α}. De même imaginons les grandeurs $\mathrm{al}_{\alpha}(u_1', u_2', k', \lambda', \mu')$ développées d'après les puissances de u_1 et u_2. Les coefficients sont alors des fonctions rationnelles connues des grandeurs O_{α} et des grandeurs M_0, M_1, M_2, M_3.

Proposons-nous enfin la même opération avec la grandeur:

$$\frac{\vartheta_{\alpha}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}{\vartheta_{\alpha}(v_1, v_2)^n}.$$

Nous considérons, dans ce développement, les coefficients comme inconnus, à l'exception du membre constant.

En effet ils ne sont pas indépendants l'un de l'autre, mais nous faisons abstraction de cette dépendance. Nous les désignerons par la lettre y.

Si maintenant nous posons les coefficients de tous les membres $u_1^k \cdot u_2^l$, jusqu'aux membres de $2r + 1$ ordre inclusiv., égaux entre eux, le système (3) donnera en tout $(r + 1)(16r + 22)$ équations linéaires avec les $(r + 1)^2 - 1 + \frac{n^2 + 1}{2}$ inconnues y et x_{ε}, et le système de 15 équations donnera $(r + 1)(15r + 21)$ équations linéaires avec les $\frac{n^2 + 1}{2}$ inconnues x_{ε}.

Nous devrons toujours être en état, en faisant croître r, de représenter les inconnues comme des fonctions rationnelles des grandeurs ϑ_{α}, O_{α} et M_0, M_1, M_2, M_3. En même temps on obtient autant de rapports rationnels que l'on veut entre les grandeurs désignées.

De là se tire le

Théorème. Tous les coefficients que l'on rencontre dans la transformation de $n^{\text{ème}}$ degré, sont des fonctions rationnelles des grandeurs

ϑ_a, O_a, M_0, M_1, M_2, M_3. On peut les représenter d'autant de manières que l'on veut. Entre les grandeurs que nous venons d'indiquer il y a par conséquent autant de rapports rationnels que l'on veut.

Cependant on peut encore réduire le problème.

Pour cela nous démontrons que tous les produits des constantes deux à deux peuvent s'exprimer comme des fonctions rationnelles des grandeurs ϑ_a et O_a.

En effet on sait que les carrés de toutes les fonctions théta peuvent s'exprimer linéairement par les carrés de 4 de ces fonctions, entre lesquelles il y a une relation bicarrée. Nous choisissons les fonctions $\vartheta_5(v_1, v_2)$, $\vartheta_{02}(v_1, v_2)$, $\vartheta_1(v_1, v_2)$, $\vartheta_{34}(v_1, v_2)$; on a alors:

$$N\vartheta_{23}^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = O_5^2 O_{23}^2 \vartheta_5^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') - O_5^2 O_{03}^2 \vartheta_{02}^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$$
$$- O_{34}^2 O_{03}^2 \vartheta_1^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') + O_{34}^2 O_{23}^2 \vartheta_{34}^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}').$$

$$N\vartheta_0^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = O_{23}^2 O_{14}^2 \vartheta_5^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') - O_{14}^2 O_{03}^2 \vartheta_{02}^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$$
$$(5) \qquad + O_4^2 O_{23}^2 \vartheta_1^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') - O_4^2 O_{03}^2 \vartheta_{34}^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}').$$

$$N\vartheta_3^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = O_{34}^2 O_4^2 \vartheta_5^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') - O_5^2 O_{14}^2 \vartheta_{02}^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$$
$$- O_{34}^2 O_{14}^2 \vartheta_1^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') + O_5^2 O_4^2 \vartheta_{34}^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}').$$

$$N = O_{23}^4 + O_{03}^4.$$

On obtient les neuf autres expressions en substituant des demi-périodes.

Imaginons qu'on divise ces équations par $\vartheta_5(v_1, v_2)^{2n}$ et qu'au lieu de $\dfrac{\vartheta_a(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2}{\vartheta_5(v_1, v_2)^{2n}}$ on introduise leurs valeurs tirées du système primitif d'équations. Nous obtenons alors 12 équations linéaires avec les inconnues $x_\varepsilon . x_{\varepsilon_1}$. Les coefficients, si on ajoute ϑ_a et O_a, sont des fonctions rationnelles de $\mathrm{al}_a(u_1, u_2)$. En développant d'après les puissances de u_1 et u_2 on obtient alors immédiatement le résultat demandé.

Mais si on peut donner aux produits de toutes les constantes, deux à deux, l'expression de fonctions rationnelles des grandeurs ϑ_α et O_α, la même conséquence a lieu aussi pour les grandeurs M_0, M_1, M_2, M_3. En effet, nous n'avons guère qu'à former les deux produits

$$\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') \cdot \vartheta_{02}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$$

et

$$\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') \cdot \vartheta_1(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$$

et à les différencier pour voir se vérifier notre assertion. Et nous arrivons ainsi au

Théorème. On peut exprimer rationnellement par les grandeurs ϑ_α et O_α toutes les constantes que l'on rencontre dans la transformation de $n^{\text{ème}}$ degré, et d'autant de manières que l'on veut. Il y a donc entre les grandeurs ϑ_α et O_α autant de rapports rationnels que l'on veut.

Le nombre de ces relation peut d'abord être augmenté par une transformation linéaire. En outre, à chaque transformation appartient une autre transformation supplémentaire qui jointe à la première conduit à la multiplication. Supposons qu'on s'en serve et qu'on tire les mêmes conclusions que plus haut, on aura entre ϑ_α et O_α de nouvelles relations, qui en général seront différentes de celles qu'on a trouvées plus haut.

§ 3.

Il faut maintenant considérer d'abord plus en détail le cas $r = 0$. On est alors amené pour les cas $n = 3$ et $n = 5$ à la détermination des constantes et à la déduction d'une série de relations théta.

Soit d'abord $n = 3$.

On a alors:

$$(1) \quad \vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = x_1\vartheta_5(v_1, v_2)^3 + x_2\vartheta_5(v_1, v_2)\vartheta_1(v_1, v_2)^2$$
$$+ x_3\vartheta_5(v_1, v_2)\vartheta_{02}(v_1, v_2)^2 + x_4\vartheta_5(v_1, v_2)\vartheta_{34}(v_1, v_2)^2$$
$$+ x_5\vartheta_1(v_1, v_2)\vartheta_{02}(v_1, v_2)\vartheta_{34}(v_1, v_2).$$

Si, dans cette équation et dans les 15 équations que nous obtenons en substituant des demi-périodes, nous posons $v_1 = v_2 = 0$, nous obtenons les 10 équations:

$$O_5\vartheta_5 = x_1\vartheta_5^4 + x_4\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2, \qquad O_{34}\vartheta_{34} = x_1\vartheta_{34}^4 + x_4\vartheta_{34}^2\vartheta_5^2.$$

$$O_{03}\vartheta_{03} = x_1\vartheta_{03}^4 + x_3\vartheta_{03}^2\vartheta_{23}^2, \qquad O_{23}\vartheta_{23} = x_1\vartheta_{23}^4 - x_3\vartheta_{23}^2\vartheta_{03}^2.$$

$$O_4\vartheta_4 = x_1\vartheta_4^4 - x_2\vartheta_4^2\vartheta_{14}^2, \qquad \varepsilon O_{14}\vartheta_{14} = x_1\vartheta_{14}^4 + x_2\vartheta_{14}^2\vartheta_4^2.$$

$$(2) \qquad O_0\vartheta_0 = x_1\vartheta_0^4 + x_2\vartheta_0^2\vartheta_{01}^2 + x_3\vartheta_0^2\vartheta_2^2 + x_4\vartheta_0^2\vartheta_{12}^2 + x_5\vartheta_0\vartheta_{01}\vartheta_2\vartheta_{12}.$$

$$O_{01}\vartheta_{01} = x_1\vartheta_{01}^4 - x_2\vartheta_{01}^2\vartheta_0^2 - x_3\vartheta_{01}^2\vartheta_{12}^2 + x_4\vartheta_{01}^2\vartheta_2^2 - x_5\vartheta_0\vartheta_{01}\vartheta_2\vartheta_{12}.$$

$$O_2\vartheta_2 = x_1\vartheta_2^4 - x_2\vartheta_2^2\vartheta_{12}^2 - x_3\vartheta_2^2\vartheta_0^2 + x_4\vartheta_2^2\vartheta_{01}^2 - x_5\vartheta_0\vartheta_{01}\vartheta_2\vartheta_{12}.$$

$$O_{12}\vartheta_{12} = x_1\vartheta_{12}^4 + x_2\vartheta_{12}^2\vartheta_2^2 + x_3\vartheta_{12}^2\vartheta_{01}^2 + x_4\vartheta_{12}^2\vartheta_0^2 + x_5\vartheta_0\vartheta_{01}\vartheta_2\vartheta_{12}.$$

Ici on a posé:

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{\gamma_2+\delta_1-2}{2}}.$$

En se servant de la transformation supplémentaire on obtient, après quelques conséquences auxiliaires:

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad \vartheta_5(nv_1, nv_2) = {} & x_1'\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^3 \\
& + x_2'\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')\vartheta_1(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2 \\
& + x_3'\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')\vartheta_{02}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2 \\
& + x_4'\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')\vartheta_{34}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2 \\
& + x_5'\vartheta_1(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')\vartheta_{02}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')\vartheta_{34}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}').
\end{aligned}
$$

Des opérations très simples montrent que les 10 équations ci-dessus restent invariables quand on pose x_α' au lieu de x_α, O_α au lieu de ϑ_α, et réciproquement.

Des équations on tire:

$$(4)\qquad x_1 = \frac{O_{34}\vartheta_{34} - O_5\vartheta_5}{\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4}$$

$$(5)\qquad x_2 = \frac{\varepsilon O_{14}\vartheta_4^3 - O_4\vartheta_{14}^3}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14}(\vartheta_4^4 + \vartheta_{14}^4)}$$

$$(6)\qquad x_3 = \frac{O_{03}\vartheta_{23}^3 - O_{23}\vartheta_{03}^3}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23}(\vartheta_{23}^4 + \vartheta_{03}^4)}$$

$$(7)\qquad x_4 = \frac{O_5\vartheta_{34}^3 - O_{34}\vartheta_5^3}{\vartheta_5\vartheta_{34}(\vartheta_{34}^4 - \vartheta_5^4)}.$$

x_5 est déterminé par une des quatre dernières équations (2), par exemple par la 7^{e}. On en tire immédiatement les valeurs de x'_α.

On obtient en même temps les relations trouvées par Koenigsberger

$$(8)\qquad \begin{aligned} O_{03}\vartheta_{03} + O_{23}\vartheta_{23} + O_{34}\vartheta_{34} &= O_5\vartheta_5 \\ O_{01}\vartheta_{01} + O_{12}\vartheta_{12} + \varepsilon O_{14}\vartheta_{14} &= O_5\vartheta_5 \\ O_4\vartheta_4 + \varepsilon O_{14}\vartheta_{14} + O_{34}\vartheta_{34} &= O_5\vartheta_5, \end{aligned}$$

puis les relations:

$$(9)\qquad \begin{aligned} O_0\vartheta_0 + O_{01}\vartheta_{01} &= x_1(\vartheta_0^4 + \vartheta_{01}^4) - x_3\vartheta_{03}^2\vartheta_{23}^2 + x_4\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2 \\ &= x'_1(O_0^4 + O_{01}^4) - x'_3O_{03}^2O_{23}^2 + x'_4O_5^2O_{34}^2 \\ O_0\vartheta_0 + O_2\vartheta_2 &= x_1(\vartheta_0^4 + \vartheta_2^4) + x_2\vartheta_4^2\vartheta_{14}^2 + x_4\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2 \\ &= x'_1(O_0^4 + O_2^4) + x'_2O_4^2O_{14}^2 + x'_4O_5^2O_{34}^2 \\ O_0\vartheta_0 - O_{12}\vartheta_{12} &= x_1(\vartheta_0^4 - \vartheta_{12}^4) + x_2\vartheta_4^2\vartheta_{14}^2 - x_3\vartheta_{03}^2\vartheta_{23}^2 \\ &= x'_1(O_0^4 - O_{12}^4) + x'_2O_4^2O_{14}^2 - x'_3O_{03}^2O_{23}^2. \end{aligned}$$

En différenciant on obtient ensuite les équations:

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
&\varepsilon_1 \frac{O_5}{\vartheta_5} \mathrm{Al}_3'(u_2')_0 M_{i+1} && = (-x_3\vartheta_{14}^2 + x_4\vartheta_4^2)\,\mathrm{al}_3'(u_i)_0 \\
& && \quad + x_5\vartheta_4\vartheta_{14}\,\mathrm{al}_{13}'(u_i)_0. \\
&\varepsilon_2 \frac{O_5}{\vartheta_5}[\mathrm{Al}_{13}'(u_1')_0 M_{i-1} + \mathrm{Al}_{13}'(u_2')_0 M_{i+1}] && = (x_3\vartheta_4^2 + x_4\vartheta_{14}^2)\,\mathrm{al}_{13}'(u_i)_0 \\
& && \quad - x_5\vartheta_4\vartheta_{14}\,\mathrm{al}_3'(u_i)_0. \\
&\varepsilon_1 \frac{O_5}{\vartheta_5} \mathrm{Al}_{24}'(u_1')_0 M_{i-1} && = (-x_2\vartheta_{03}^2 + x_4\vartheta_{23}^2)\,\mathrm{al}_{24}'(u_i)_0 \\
& && \quad - x_5\vartheta_{23}\vartheta_{03}\,\mathrm{al}_{04}'(u_i)_0. \\
&\varepsilon_1 \frac{O_5}{\vartheta_5}[\mathrm{Al}_{04}'(u_1')_0 M_{i-1} + \mathrm{Al}_{04}'(u_2')_0 M_{i+1}] && = (x_2\vartheta_{23}^2 + x_4\vartheta_{03}^2)\,\mathrm{al}_{04}'(u_i)_0 \\
& && \quad + x_5\vartheta_{23}\vartheta_{03}\,\mathrm{al}_{24}'(u_i)_0. \\
&\varepsilon_2 \frac{O_5}{\vartheta_5}[\mathrm{Al}_{02}'(u_1')_0 M_{i-1} + \mathrm{Al}_{02}'(u_2')_0 M_{i+1}] && = (x_2\vartheta_{34}^2 + x_3\vartheta_5^2)\,\mathrm{al}_{02}'(u_i)_0 \\
& && \quad + x_5\vartheta_5\vartheta_{34}\,\mathrm{al}_1'(u_i)_0. \\
&\varepsilon_2 \frac{O_5}{\vartheta_5}[\mathrm{Al}_1'(u_1')_0 M_{i-1} + \mathrm{Al}_1'(u_2')_0 M_{i+1}] && = (x_2\vartheta_5^2 + x_3\vartheta_{34}^2)\,\mathrm{al}_1'(u_i)_0 \\
& && \quad + x_5\vartheta_5\vartheta_{34}\,\mathrm{al}_{02}'(u_i)_0.
\end{aligned}
$$

Dans ces douze équations on a posé:

$$\varepsilon_1 = (-1)^{\frac{\gamma_2 - 1}{2}}, \qquad \varepsilon_2 = (-1)^{\frac{\delta_3 - 1}{2}}.$$

On en tire immédiatement les valeurs pour M_0, M_1, M_2, M_3:

$$(11)\qquad \varepsilon_1 M_0 = \vartheta_{03}\vartheta_{14}\,\frac{O_{34}O_4O_5}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5}\,\frac{(-x_2\vartheta_{03}^2 + x_4\vartheta_{23}^2)\vartheta_{12}\vartheta_0 + x_5\vartheta_{23}^2\vartheta_{01}\vartheta_2}{O_{03}O_{12}O_0O_{14}}.$$

$$(12)\qquad \varepsilon_1 M_1 = \vartheta_{03}\vartheta_{23}\,\frac{O_{34}O_4O_5}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5}\,x_5\,\frac{\vartheta_{14}\vartheta_{01}\vartheta_2\vartheta_{23}}{O_{03}O_{12}O_0O_{14}}.$$

$$(13)\qquad \varepsilon_1 M_2 = \vartheta_4\vartheta_{14}\,\frac{O_{34}^2O_4^2O_5^2}{\vartheta_{34}^2\vartheta_4^2\vartheta_5^2}\,x_5\,\frac{\vartheta_{23}\vartheta_{03}\vartheta_4\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2}{O_{01}O_{12}O_{23}O_2O_{03}O_0O_{14}}.$$

$$(14)\qquad \varepsilon_1 M_3 = \vartheta_{03}\vartheta_{14}\,\frac{\vartheta_{23}O_{34}^2O_4^2O_5^2}{O_{23}\vartheta_{34}^2\vartheta_4^2\vartheta_5^2}\cdot\frac{(-x_3\vartheta_{14}^2 + x_4\vartheta_4^2)\vartheta_{01}\vartheta_{12}\vartheta_2\vartheta_0 + x_5\mu^2\vartheta_{34}^2\vartheta_4^2\vartheta_5^2}{O_{01}O_{12}O_2O_{03}O_0O_{14}}.$$

On a en même temps, d'après le travail que l'auteur a publié dans le 20e volume des *Mathematische Annalen* sur les équations de multiplicateurs:

$$(15) \qquad M_0 M_3 - M_1 M_2 = M = \alpha_0 \beta_1 \frac{O_{34}^3 \cdot O_4^3 \cdot O_5^3}{\vartheta_{34}^3 \cdot \vartheta_4^3 \cdot \vartheta_5^3} \cdot \frac{\vartheta_{01}\vartheta_{12}\vartheta_{23}\vartheta_2\vartheta_{03}\vartheta_0\vartheta_{14}}{O_{01}O_{12}O_{23}O_2O_{03}O_0O_{14}}.$$

Après cela il reste encore 8 relations entre les grandeurs ϑ_α et O_α. Les résultats apparaîtront plus nettement si nous introduisons les relations suivantes:

$$[\mathrm{Al}'_\alpha(u'_1)_0 M_0 + \mathrm{Al}'_\alpha(u'_2)_0 M_2]\,\mathrm{al}'_\alpha(u_2)_0 - [\mathrm{Al}'_\alpha(u'_1)_0 M_1 + \mathrm{Al}'_\alpha(u'_2)_0 M_3]\,\mathrm{al}'_\alpha(u_1)_0 = d_\alpha.$$

$$[\mathrm{Al}'_\alpha(u'_1)_0 M_0 + \mathrm{Al}'_\alpha(u'_2) M_2]\,\mathrm{al}'_\beta(u_2)_0 - [\mathrm{Al}'_\alpha(u'_1) M_1 + \mathrm{Al}'_\alpha(u'_2)_0 M_3]\,\mathrm{al}'_\beta(u_1)_0 = d_\alpha^\beta.$$

Les 12 équations ci-dessus prennent alors la forme:

$$(16) \quad x_5 \lambda_k^2 \frac{\vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{O_5 \cdot \vartheta_5} = \varepsilon_1 d_3 = \varepsilon_2 d_{13} = -\varepsilon_1 d_{24} = -\varepsilon_1 d_{04} = -\varepsilon_2 d_{02} = \varepsilon_2 d_1.$$

$$(17) \quad \begin{aligned}
\varepsilon_1 d_3^{13} &= (x_3 \vartheta_{14}^2 - x_4 \vartheta_4^2) \frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_5 \cdot O_5}.\\
\varepsilon_2 d_{13}^3 &= (x_3 \vartheta_4^2 + x_4 \vartheta_{14}^2) \frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_5 \cdot O_5}.\\
\varepsilon_1 d_{24}^{04} &= (x_2 \vartheta_{03}^2 - x_4 \vartheta_{23}^2) \frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_5 \cdot O_5}.\\
\varepsilon_1 d_{04}^{24} &= -(x_2 \vartheta_{23}^2 + x_4 \vartheta_{03}^2) \frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_5 \cdot O_5}.\\
\varepsilon_2 d_{02}^1 &= (x_2 \vartheta_{34}^2 + x_3 \vartheta_5^2) \frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_5 \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_5 \cdot O_5}.\\
\varepsilon_2 d_1^{02} &= -(x_2 \vartheta_5^2 + x_3 \vartheta_{34}^2) \frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_5 \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_5 \cdot O_5}.
\end{aligned}$$

En employant la transformation supplémentaire on obtient un nouveau système de formules. On peut le tirer de celui qui précède, en posant x'_α au lieu de x_α, O_α au lieu de ϑ_α, et réciproquement,

$$+\frac{3M_3}{M}, \quad -\frac{3M_2}{M}, \quad -\frac{3M_1}{M}, \quad \frac{3M_0}{M}$$

respect. au lieu de M_0, M_1, M_2, M_3, et enfin ε_2, ε_1 respect. au lieu de ε_1, ε_2. En comparant on obtient alors les relations suivantes:

(18)
$$
\begin{aligned}
3(-x_3\vartheta_{14}^2 + x_4\vartheta_4^2) &= N(x_3' O_4^2 + x_4' O_{14}^2)\frac{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14}}{O_4 \cdot \varepsilon O_{14}} \quad .\\
3(x_3\vartheta_4^2 + x_4\vartheta_{14}^2) &= N(-x_3' O_{14}^2 + x_4' O_4^2)\frac{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14}}{O_4 \cdot \varepsilon O_{14}} \cdot\\
3(x_2\vartheta_{23}^2 + x_4\vartheta_{03}^2) &= N(x_2' O_{03}^2 - x_4' O_{23}^2)\frac{\vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03}}{O_{23} \cdot O_{03}} \quad .\\
3(x_2\vartheta_{03}^2 - x_4\vartheta_{23}^2) &= N(x_2' O_{23}^2 + x_4' O_{03}^2)\frac{\vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03}}{O_{23} \cdot O_{03}} \quad .\\
3(x_2\vartheta_5^2 + x_3\vartheta_{34}^2) &= N(x_2' O_{34}^2 + x_3' O_5^2)\frac{\vartheta_5 \cdot \vartheta_{34}}{O_5 \cdot O_{34}} \quad .\\
3(x_2\vartheta_{34}^2 + x_3\vartheta_5^2) &= N(x_2' O_5^2 + x_3' O_{34}^2)\frac{\vartheta_5 \cdot \vartheta_{34}}{O_5 \cdot O_{34}} \quad .
\end{aligned}
$$

On a posé ici:

$$N = \alpha_0\beta_1 \frac{O_{34} \cdot O_5 \cdot O_{03} \cdot O_{23} \cdot O_4 \cdot O_{14}}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_{14}}.$$

On a ainsi un grand nombre de relations. On peut facilement en développer une partie, mais non pas toutes, avec les formules de Koenigsberger. Cela vient de ce que les équations proposées par Koenigsberger sont valables pour les fonctions hyperelliptiques, tandis que quelques-unes de celles que nous avons données plus haut sont valables pour les fonctions théta. En employant la transformation linéaire on peut déduire une autre série de formules; toutefois nous n'en tenons pas compte.

Nous prenons maintenant le cas $n = 5$. Pour ce qui concerne ce cas on peut se reporter à deux travaux de l'auteur, qui se trouvent dans le 16^e^ et dans le 20^e^ volume des *Mathematische Annalen.*

Nous posons:

$$\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = \tag{19}$$

$$x_1\vartheta_5(v_1, v_2)^3\vartheta_1(v_1, v_2)^2 + x_2\vartheta_5(v_1, v_2)^3\vartheta_{02}(v_1, v_2)^2$$

$$+ x_3\vartheta_5(v_1, v_2)^3\vartheta_{34}(v_1, v_2)^2 + x_4\vartheta_5(v_1, v_2)^2\vartheta_1(v_1, v_2)\vartheta_{02}(v_1, v_2)\vartheta_{34}(v_1, v_2)$$

$$+ x_5\vartheta_5(v_1, v_2)\vartheta_1(v_1, v_2)^4 + x_6\vartheta_5(v_1, v_2)\vartheta_{02}(v_1, v_2)^4 + x_7\vartheta_5(v_1, v_2)\vartheta_{34}(v_1, v_2)^4$$

$$+ x_8\vartheta_5(v_1, v_2)\vartheta_{02}(v_1, v_2)^2\vartheta_{34}(v_1, v_2)^2 + x_9\vartheta_5(v_1, v_2)\vartheta_{34}(v_1, v_2)^2\vartheta_1(v_1, v_2)^2$$

$$+ x_{10}\vartheta_5(v_1, v_2)\vartheta_1(v_1, v_2)^2\vartheta_{02}(v_1, v_2)^2 + x_{11}\vartheta_1(v_1, v_2)^3\vartheta_{02}(v_1, v_2)\vartheta_{34}(v_1, v_2)$$

$$+ x_{12}\vartheta_1(v_1, v_2)\vartheta_{02}(v_1, v_2)^3\vartheta_{34}(v_1, v_2) + x_{13}\vartheta_1(v_1\ v_2)\vartheta_{02}(v_1, v_2)\vartheta_{34}(v_1, v_2)^3.$$

En substituant des demi-périodes, on a, après quelques réductions faciles, les 10 équations:

$$x_1 = \frac{O_{14}\vartheta_{14}^3 - O_4\vartheta_4^3}{\vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{14}^2(\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}. \qquad x_5 = \frac{O_{14}\vartheta_4 + O_4\vartheta_{14}}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14}(\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}.$$

$$x_2 = \frac{O_{03}\vartheta_{03}^3 - O_{23}\vartheta_{23}^3}{\vartheta_{23}^2 \cdot \vartheta_{03}^2(\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}. \qquad x_6 = \frac{O_{03}\vartheta_{23} + O_{23}\vartheta_{03}}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23}(\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}.$$

$$x_3 = \frac{O_5\vartheta_5^3 - O_{34}\vartheta_{34}^3}{\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_5^2(\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}. \qquad x_7 = \frac{O_{34}\vartheta_5 - O_5\vartheta_{34}}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_5(\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}.$$

$$\frac{O_2}{\vartheta_2} - \frac{O_{01}}{\vartheta_{01}} + \frac{O_0}{\vartheta_0} - \frac{O_{12}}{\vartheta_{12}} = 2x_1\vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{14}^2 + (x_5 - x_6 - x_7)(\vartheta_4^4 - \vartheta_{14}^4) + 2x_8\vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{14}^2$$

$$+ x_{11}\frac{\vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^2}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12}} + x_{12}\frac{\vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{14}^2(\vartheta_0^2\vartheta_{12}^2 - \vartheta_2^2 \cdot \vartheta_{01}^2)}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12}} - x_{13}\frac{\vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{14}^2(\vartheta_{01}^2\vartheta_{12}^2 + \vartheta_2^2\vartheta_0^2)}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12}}. \tag{20}$$

$$\frac{O_2}{\vartheta_2} - \frac{O_{01}}{\vartheta_{01}} - \frac{O_0}{\vartheta_0} + \frac{O_{12}}{\vartheta_{12}} = 2x_2\vartheta_{03}^2\vartheta_{23}^2 + (x_5 - x_6 - x_7)(\vartheta_{03}^4 - \vartheta_{23}^4) - 2x_9\vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^2$$

$$+ x_{11}\frac{\vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^2(\vartheta_0^2\vartheta_{12}^2 - \vartheta_{01}^2\vartheta_2^2)}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12}} + x_{12}\frac{\vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{34}^2}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12}} - x_{13}\frac{\vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^2(\vartheta_2^2\vartheta_{12}^2 + \vartheta_0^2 \cdot \vartheta_{01}^2)}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12}}.$$

$$\frac{O_2}{\vartheta_2} + \frac{O_{01}}{\vartheta_{01}} + \frac{O_0}{\vartheta_0} + \frac{O_{12}}{\vartheta_{12}} = 2x_3\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2 + (x_5 + x_6 + x_7)(\vartheta_5^4 + \vartheta_{34}^4) + 2x_{10}\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2$$

$$+ x_{11}\frac{\vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{34}^2(\vartheta_0^2\vartheta_2^2 + \vartheta_{01}^2\vartheta_{12}^2)}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12}} + x_{12}\frac{\vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{34}^2(\vartheta_2^2\vartheta_{12}^2 + \vartheta_0^2\vartheta_{01}^2)}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12}} - x_{13}\frac{\vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^2 \cdot \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{14}^2}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12}}.$$

$$O_2 = -x_1\vartheta_2^3\vartheta_{12}^2 - x_2\vartheta_2^3\vartheta_0^2 + x_3\vartheta_2^3\vartheta_{01}^2 - x_4\vartheta_2^2\vartheta_{01}\vartheta_{12}\vartheta_0 + x_5\vartheta_2\vartheta_{12}^4 + x_6\vartheta_2\vartheta_0^4$$
$$+ x_7\vartheta_2\vartheta_{01}^4 - x_8\vartheta_2\vartheta_0^2\vartheta_{01}^2 - x_9\vartheta_2\vartheta_{12}^2\vartheta_{01}^2 + x_{10}\vartheta_2\vartheta_0^2\vartheta_{12}^2 + x_{11}\vartheta_{12}^3\vartheta_0\vartheta_{01}$$
$$+ x_{12}\vartheta_{12}\vartheta_0^3\vartheta_{01} - x_{13}\vartheta_{12}\vartheta_0\vartheta_{01}^3.$$

Ces équations font connaître les constantes $x_1, \ldots, x_{10}$, quand les trois constantes x_{11}, x_{12}, x_{13} sont données.

En employant la transformation supplémentaire on trouve des expressions analogues pour les grandeurs x'_α.

En différenciant on trouve d'abord, pour les constantes x_{11}, x_{12}, x_{13}, les expressions:

$$\tag{21} \begin{aligned} x_{11} &= \frac{O_5 \cdot \vartheta_5(d_1\vartheta_5^2 + d_{02}\vartheta_{34}^2)}{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0(\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)} \\ x_{12} &= \frac{O_5 \cdot \vartheta_5(d_{13}\vartheta_4^2 - d_3\vartheta_{14}^2)}{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0(\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)} \\ x_{13} &= \frac{O_5 \cdot \vartheta_5(d_{24}\vartheta_{23}^2 + d_{04}\vartheta_{03}^2)}{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0(\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}. \end{aligned}$$

En même temps on obtient les neuf relations:

$$\tag{22} \begin{aligned} d_1\vartheta_5^2 + d_{02}\vartheta_{34}^2 &= d_{24}\vartheta_{03}^2 - d_{04}\vartheta_{23}^2 \\ d_3\vartheta_{14}^2 - d_{13}\vartheta_4^2 &= d_1\vartheta_{34}^2 + d_{02}\vartheta_5^2 \\ - d_{24}\vartheta_{23}^2 - d_{04}\vartheta_{03}^2 &= d_{13}\vartheta_{14}^2 + d_3\vartheta_4^2. \end{aligned}$$

$$\tag{23} \begin{aligned} d_3^{13} &= -(x_6\vartheta_{14}^4 + x_7\vartheta_4^4 - x_8\vartheta_{14}^2\vartheta_4^2)\frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14} \cdot O_5 \cdot \vartheta_5}. \\ d_{13}^3 &= (x_6\vartheta_4^4 + x_7\vartheta_{14}^4 + x_8\vartheta_{14}^2\vartheta_4^2)\frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14} \cdot O_5 \cdot \vartheta_5}. \\ d_{24}^{04} &= -(x_5\vartheta_{03}^4 + x_7\vartheta_{23}^4 - x_9\vartheta_{23}^2\vartheta_{03}^2)\frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03} \cdot O_5 \cdot \vartheta_5}. \\ d_{04}^{24} &= (x_5\vartheta_{23}^4 + x_7\vartheta_{03}^4 + x_9\vartheta_{23}^2\vartheta_{03}^2)\frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03} \cdot O_5 \cdot \vartheta_5}. \\ d_{02}^1 &= (x_5\vartheta_{34}^4 + x_6\vartheta_5^4 + x_{10}\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2)\frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_5 \cdot \vartheta_{34}\, O_5 \cdot \vartheta_5}. \\ d_1^{02} &= -(x_5\vartheta_5^4 + x_6\vartheta_{34}^4 + x_{10}\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2)\frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_5 \cdot \vartheta_{34}\, O_5 \cdot \vartheta_5}. \end{aligned}$$

En employant la transformation supplémentaire on obtient d'abord trois expressions analogues pour les grandeurs x'_{11}, x'_{12}, x'_{13}, puis les trois relations:

$$
(24)\qquad
\begin{aligned}
d_1 O_5^2 + d_{02} O_{34}^2 &= d_{24} O_{03}^2 - d_{04} O_{23}^2 .\\
d_3 O_{14}^2 - d_{13} O_4^2 &= d_1 O_{34}^2 + d_{02} O_5^2 .\\
- d_{24} O_{23}^2 - d_{04} O_{03}^2 &= d_{13} O_{14}^2 + d_3 O_4^2
\end{aligned}
$$

et enfin six expressions pour les grandeurs d_a^5. En les comparant avec celles qu'on a trouvées plus haut on obtient les 6 relations:

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
5(x_6 \vartheta_{14}^4 + x_7 \vartheta_4^4 - x_8 \vartheta_{14}^2 \vartheta_4^2) &= N(x'_6 O_4^4 + x'_7 O_{14}^4 + x'_8 O_{14}^2 O_4^2)\frac{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14}}{O_4 \cdot O_{14}} .\\
5(x_6 \vartheta_4^4 + x_7 \vartheta_{14}^4 + x_8 \vartheta_{14}^2 \vartheta_4^2) &= N(x'_6 O_{14}^4 + x'_7 O_4^4 - x'_8 O_{14}^2 O_4^2)\frac{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14}}{O_4 \cdot O_{14}} .\\
5(x_5 \vartheta_{03}^4 + x_7 \vartheta_{23}^4 - x_9 \vartheta_{23}^2 \vartheta_{03}^2) &= N(x'_5 O_{23}^4 + x'_7 O_{03}^4 + x'_9 O_{23}^2 O_{03}^2)\frac{\vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03}}{O_{23} \cdot O_{03}} .\\
5(x_5 \vartheta_{23}^4 + x_7 \vartheta_{03}^4 + x_9 \vartheta_{23}^2 \vartheta_{03}^2) &= N(x'_5 O_{03}^4 + x'_7 O_{23}^4 - x'_9 O_{23}^2 O_{03}^2)\frac{\vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03}}{O_{23} \cdot O_{03}} .\\
5(x_5 \vartheta_{34}^4 + x_6 \vartheta_5^4 + x_{10} \vartheta_5^2 \vartheta_{34}^2) &= N(x'_5 O_5^4 + x'_6 O_{34}^4 + x'_{10} O_5^2 O_{34}^2)\frac{\vartheta_5 \cdot \vartheta_{34}}{O_5 \cdot O_{34}} .\\
5(x_5 \vartheta_5^4 + x_6 \vartheta_{34}^4 + x_{10} \vartheta_5^2 \vartheta_{34}^2) &= N(x'_5 O_{34}^4 + x'_6 O_5^4 + x'_{10} O_5^2 O_{34}^2)\frac{\vartheta_5 \cdot \vartheta_{34}}{O_5 \cdot O_{34}} .
\end{aligned}
$$

On tire de là les équations données par l'auteur dans le 20[e] volume des *Mathematische Annalen*:

$$
(26)\qquad
\begin{aligned}
5\left(\frac{O_{34}}{\vartheta_{34}} - \frac{O_5}{\vartheta_5} + \frac{O_{23}}{\vartheta_{23}} + \frac{O_{03}}{\vartheta_{03}}\right) &= \alpha_0\beta_1\left(\frac{\vartheta_{34}}{O_{34}} - \frac{\vartheta_5}{O_5} + \frac{\vartheta_{23}}{O_{23}} + \frac{\vartheta_{03}}{O_{03}}\right)\frac{O_{34} \cdot O_5 \cdot O_{23} \cdot O_{03}}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03}} .\\
5\left(\frac{O_4}{\vartheta_4} + \frac{O_{14}}{\vartheta_{14}} + \frac{O_{34}}{\vartheta_{34}} - \frac{O_5}{\vartheta_5}\right) &= \alpha_0\beta_1\left(\frac{\vartheta_4}{O_4} + \frac{\vartheta_{14}}{O_{14}} + \frac{\vartheta_{34}}{O_{34}} - \frac{\vartheta_5}{O_5}\right)\frac{O_4 \cdot O_{14} \cdot O_{34} \cdot O_5}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_5} .\\
-5\left(\frac{O_{23}}{\vartheta_{23}} + \frac{O_{03}}{\vartheta_{03}} - \frac{O_4}{\vartheta_4} - \frac{O_{14}}{\vartheta_{14}}\right) &= \alpha_0\beta_1\left(\frac{\vartheta_{23}}{O_{23}} + \frac{\vartheta_{03}}{O_{03}} - \frac{\vartheta_4}{O_4} - \frac{\vartheta_{14}}{O_{14}}\right)\frac{O_{23} \cdot O_{03} \cdot O_4 \cdot O_{14}}{\vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_{14}} .
\end{aligned}
$$

De cette manière les 13 constantes $x_1, \ldots, x_{13}$ sont exprimées par les grandeurs ϑ_α, O_α, M_0, M_1, M_2, M_3, tandis que nous avons trouvé entre ces grandeurs mêmes une série de relations. Il n'est pas difficile, d'après ces relations, d'exprimer les grandeurs M_0, M_1, M_2, M_3 par les grandeurs ϑ_α et O_α. Mais comme ces expressions ont une forme assez compliquée, nous ne faisons qu'indiquer la marche.

D'après les équations que nous avons trouvées pour les grandeurs d_α, on peut déterminer immédiatement les rapports entre elles et l'on a:

$$
\begin{aligned}
& d_3 : d_{13} : d_{24} : d_{04} : d_{02} : d_1 = \\
& O_4^2 \vartheta_{03}^2 + O_{03}^2 \vartheta_4^2 - O_5^2 \vartheta_{12}^2 - O_{12}^2 \vartheta_5^2 + O_0^2 \vartheta_{34}^2 + O_{34}^2 \vartheta_0^2 \quad : \\
& O_{14}^2 \vartheta_{03}^2 + O_{03}^2 \vartheta_{14}^2 + O_5^2 \vartheta_2^2 + O_2^2 \vartheta_5^2 - O_{01}^2 \vartheta_{34}^2 - O_{34}^2 \vartheta_{01}^2 \quad : \\
(27) \qquad & - O_{03}^2 \vartheta_{23}^2 - O_{23}^2 \vartheta_{03}^2 - O_0^2 \vartheta_2^2 - O_2^2 \vartheta_0^2 + O_{01}^2 \vartheta_{12}^2 + O_{12}^2 \vartheta_{01}^2 \quad : \\
& - O_{03}^2 \vartheta_{03}^2 + O_{23}^2 \vartheta_{23}^2 - O_{14}^2 \vartheta_{14}^2 - O_4^2 \vartheta_4^2 - O_0^2 \vartheta_0^2 + O_2^2 \vartheta_2^2 - O_{01}^2 \vartheta_{01}^2 + O_{12}^2 \vartheta_{12}^2 + O_5^2 \vartheta_5^2 - O_{34}^2 \vartheta_{34}^2 : \\
& O_{23}^2 \vartheta_{34}^2 + O_{34}^2 \vartheta_{23}^2 - O_{14}^2 \vartheta_{12}^2 - O_{12}^2 \vartheta_{14}^2 - O_4^2 \vartheta_2^2 - O_2^2 \vartheta_4^2 \quad : \\
& - O_{23}^2 \vartheta_5^2 - O_5^2 \vartheta_{23}^2 + O_{14}^2 \vartheta_0^2 + O_0^2 \vartheta_{14}^2 + O_4^2 \vartheta_{01}^2 + O_{01}^2 \vartheta_4^2 \quad .
\end{aligned}
$$

Mais alors les rapports entre les quantités M_0, M_1, M_2, M_3 sont aussi déterminés immédiatement puisqu'entre elles et les grandeurs d_α il y a les relations:

$$
\begin{aligned}
& d_3 = \frac{\vartheta_{01} \cdot O_{01} \cdot \vartheta_{12} \cdot O_{12} \cdot \vartheta_{23} \cdot O_{23} \cdot \vartheta_2 \cdot O_2 \cdot \vartheta_{03} \cdot O_{03} \cdot \vartheta_0 \cdot O_0 \cdot \vartheta_{14} \cdot O_{14}}{\vartheta_{34}^2 \cdot O_{34}^2 \cdot \vartheta_4^2 \cdot O_4^2 \cdot \vartheta_5^2 \cdot O_5^2} M_2 . \\
& d_{13} = \frac{\vartheta_{23} \cdot O_{23} \cdot \vartheta_{03} \cdot O_{03}}{\vartheta_4 \cdot O_4} (M_0 \mu^2 + M_2 \mu^2 \mu'^2 - M_1 - M_3 \mu'^2) . \\
& d_{24} = - \frac{\vartheta_{03} \cdot O_{03} \cdot \vartheta_{12} \cdot O_{12} \cdot \vartheta_0 \cdot O_0 \cdot \vartheta_{14} \cdot O_{14}}{\vartheta_{34} \cdot O_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot O_4 \cdot \vartheta_5 \cdot O_5} M_1 . \\
(28) \qquad & d_{04} = \frac{\vartheta_{14} \cdot O_{14} \cdot \vartheta_{01} \cdot O_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot O_2 \cdot \vartheta_{23} \cdot O_{23}}{\vartheta_{34} \cdot O_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot O_4 \cdot \vartheta_5 \cdot O_5} (M_0 + M_2 - M_1 - M_3) . \\
& d_{02} = \frac{\vartheta_{12} \cdot O_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot O_{01}}{\vartheta_5 \cdot O_5} (M_0 \lambda^2 + M_2 \lambda^2 \lambda'^2 - M_1 - M_3 \lambda'^2) . \\
& d_1 = \frac{\vartheta_2 \cdot O_2 \cdot \vartheta_0 \cdot O_0}{\vartheta_{34} \cdot O_{34}} (M_0 k^2 + M_2 k^2 k'^2 - M_1 - M_3 k'^2) .
\end{aligned}
$$

La détermination des quotients des grandeurs M d'après ces équations, n'est pas une seule. Il y aura donc en même temps plusieurs relations entre les grandeurs ϑ_a et O_a.

Mais une fois connus les rapports entre les grandeurs M, on peut facilement déterminer les grandeurs elles-mêmes.

Par là sont déterminés, pour la transformation de 5^e degré, les 13 coefficients et les grandeurs M_0, M_1, M_2, M_3 comme fonctions rationnelles des grandeurs ϑ_a et O_a, tandis qu'en même temps on a trouvé une série de relations entre les grandeurs ϑ_a et O_a elles-mêmes. Par une transformation linéaire on peut encore accroître considérablement le nombre de ces relations; mais nous ne nous en occupons pas.

§ 4.

La théorie des transformations a des rapports étroits avec la théorie des nombres. Je ne veux pas ici exposer en détail tous ces rapports, mais je me contenterai d'en signaler quelques-uns. Il faut montrer d'abord comment, par une méthode purement arithmétique, on peut arriver à des rapports entre les grandeurs ϑ_a et O_a, puis comment on peut réciproquement tirer de ces rapports des conclusions relatives à la théorie des nombres.

Si on pose:

$$\mu = \frac{2i + 1 - (2j + 1)}{4}, \qquad m = \frac{2i + 1 + 3(2j + 1)}{4} \tag{1}$$

on a réciproquement:

$$2i + 1 = m + 3\mu, \qquad 2j + 1 = m - \mu \tag{2}$$

et:

$$\frac{(2i + 1)^2 + 3(2j + 1)^2}{4} = m^2 + 3\mu^2. \tag{3}$$

Si nous y joignons comme condition que $m + \mu$ est un nombre impair, il s'ensuit qu'à chaque système de valeurs m, μ correspond un système de valeurs entières $2i + 1$, $2j + 1$. La réciproque n'a pas lieu. Il faut que:

$$2i + 1 \equiv 2j + 1 \pmod 4$$

pour qu'on ait des valeurs entières μ et m. Si donc nous nous restreignons au cas où $m + \mu \equiv 1 \pmod 2$, où m et μ aussi bien que i et j parcourent tous les nombres entiers, la forme:

$$\frac{(2i + 1)^2 + 3(2j + 1)^2}{4}$$

représentera les mêmes nombres que la forme $m^2 + 3\mu^2$ et chaque nombre représenté deux fois par l'une des formes le sera aussi par l'autre.

Si ensuite nous posons:

$$(4) \qquad \begin{aligned} 2n + 1 &= l + 3\lambda \\ 2\nu + 1 &= l - \lambda, \end{aligned}$$

la même chose sera vraie pour les formes:

$$\frac{(2n + 1)^2 + 3(2\nu + 1)^2}{4} \quad \text{et} \quad l^2 + 3\lambda^2.$$

En même temps on obtient l'équation:

$$(5) \qquad m(2n + 1) + 3\mu(2\nu + 1) = l(2i + 1) + 3\lambda(2j + 1).$$

Par là, en supposant que $m + \mu \equiv l + \lambda \equiv 1 \pmod 2$, les deux séries de puissances deviennent égales l'une à l'autre:

$$\sum_{m,\mu,n,\nu} x^{m^2+3\mu^2} y^{m(2n+1)+3\mu(2\nu+1)} z^{\frac{(2n+1)^2+3(2\nu+1)^2}{4}}$$

et

$$\sum_{i,j,l,\lambda} x^{\frac{(2i+1)^2+3(2j+1)^2}{4}} y^{l(2i+1)+3\lambda(2j+1)} z^{l^2+3\lambda^2}.$$

Mais si l'on pose:

$$x = e^{\pi i \tau_{11}}, \qquad z = e^{\pi i \tau_{22}}, \qquad y = e^{\pi i \tau_{12}},$$

on a pour le représentant:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(6) \qquad \vartheta_4 O_4 - \vartheta_{03} O_{03}$$

$$= 2 \sum_{m,\mu,n,\nu} x^{m^2+3\mu^2} y^{m(2n+1)+3\mu(2\nu+1)} z^{\frac{(2n+1)^2+3(2\nu+1)^2}{4}} \qquad m + \mu \equiv 1 \pmod 2.$$

$$(7) \qquad \vartheta_{01} O_{01} - \vartheta_2 O_2$$

$$= 2 \sum_{i,j,l,\lambda} x^{\frac{(2i+1)^2+3(2j+1)^2}{4}} y^{l(2i+1)+3\lambda(2j+1)} z^{l^2+3\lambda^2} \qquad \lambda + l \equiv 1 \pmod 2.$$

Par là on obtient pour le représentant défini plus haut la relation:

$$(8) \qquad \vartheta_4 O_4 - \vartheta_{03} O_{03} = \vartheta_{01} O_{01} - \vartheta_2 O_2.$$

C'est une des équations données par Koenigsberger.

On a ensuite par une transformation linéaire, d'après les relations données pour la transformation de 5^e^ degré, l'équation:

$$(9) \quad 5\left(\frac{O_2}{\vartheta_2} - \frac{O_{01}}{\vartheta_{01}} - \frac{O_{03}}{\vartheta_{03}} + \frac{O_4}{\vartheta_4}\right) = \alpha_0\beta_1\left(-\frac{\vartheta_2}{O_2} + \frac{\vartheta_{01}}{O_{01}} + \frac{\vartheta_{03}}{O_{03}} - \frac{\vartheta_4}{O_4}\right)\frac{O_2 \cdot O_{01} \cdot O_{03} \cdot O_4}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_4}.$$

Si nous nous bornons au représentant:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

cette équation peut être écrite comme il suit:

$$
\begin{aligned}
(10)\quad & \sum_{\substack{a,b,c,d\\ \alpha,\beta,\gamma,\delta}} (-1)^b\left((-1)^\delta-(-1)^\gamma\right) x^{a^2+b^2+\frac{5(2c+1)^2+(2d+1)^2}{4}} y^{a(2\alpha+1)+b(2\beta+1)+5(2c+1)\gamma+(2d+1)\delta} z^{\frac{(2\alpha+1)^2+(2\beta+1)^2}{4}+5\gamma^2+\delta^2} \\
-& \sum_{\substack{a,b,c,d\\ \alpha,\beta,\gamma,\delta}} (-1)^\delta\left((-1)^b-(-1)^a\right) x^{5a^2+b^2+\frac{(2c+1)^2+(2d+1)^2}{4}} y^{5a(2\alpha+1)+b(2\beta+1)+(2c+1)\gamma+(2d+1)\delta} z^{\frac{5(2\alpha+1)^2+(2\beta+1)^2}{4}+\gamma^2+\delta^2} \\
=5& \sum_{\substack{a,b,c,d\\ \alpha,\beta,\gamma,\delta}} (-1)^\delta\left((-1)^b-(-1)^a\right) x^{a^2+5b^2+\frac{5(2c+1)^2+5(2d+1)^2}{4}} y^{a(2\alpha+1)+5b(2\beta+1)+5(2c+1)\gamma+5(2d+1)\delta} z^{\frac{(2\alpha+1)^2+5(2\beta+1)^2}{4}+5\gamma^2+5\delta^2} \\
-5& \sum_{\substack{a,b,c,d\\ \alpha,\beta,\gamma,\delta}} (-1)^b\left((-1)^\delta-(-1)^\gamma\right) x^{5a^2+5b^2+\frac{(2c+1)^2+5(2d+1)^2}{4}} y^{5a(2\alpha+1)+5b(2\beta+1)+(2c+1)\gamma+5(2d+1)\delta} z^{\frac{5(2\alpha+1)^2+5(2\beta+1)^2}{4}+\gamma^2+5\delta^2}.
\end{aligned}
$$

La discussion plus approfondie de cette équation fournit diverses relations entre les formes quadratiques:

$$4u^2+4v^2+w^2+5z^2,\qquad 4u^2+v^2+w^2+20z^2$$

d'une part et:

$$20u^2+20v^2+5w^2+z^2,\qquad 20u^2+5v^2+5w^2+4z^2$$

d'autre part.

On peut établir de telles relations soit en attribuant des valeurs spéciales aux grandeurs x, y, z, ou en égalant les uns aux autres les coefficients des puissances de z à gauche et à droite.

Prenons, par exemple, le coefficient de $z^{\frac{b}{4}}$, nous obtenons l'équation:

$$
\begin{aligned}
(11)\quad & 4\sum_{a,b,c,d} (-1)^b x^{a^2+b^2+\frac{5(2c+1)^2+(2d+1)^2}{4}} y^{a+b+2d+1} \\
+& \sum_{a,b,c,d} \left((-1)^b-(-1)^a\right) x^{5a^2+b^2+\frac{(2c+1)^2+(2d+1)^2}{4}} y^{5a+b} \\
=-5& \sum_{a,b,c,d} \left((-1)^b-(-1)^a\right) x^{a^2+5b^2+\frac{5(2c+1)^2+5(2d+1)^2}{4}} y^{a+5b}.
\end{aligned}
$$

Comme l'expression:

$$4a^2 + 20b^2 + 5(2c + 1)^2 + 5(2d + 1)^2$$

ne peut jamais être congruente à $\pm 2 \pmod 5$, on a l'équation:

$$(12) \qquad 4\sum_{a,b,c,d} (-1)^b x^{a^2+b^2+\frac{5(2c+1)^2+(2d+1)^2}{4}} y^{a+b+2d+1}$$

$$= \sum_{a,b,c,d} ((-1)^a - (-1)^b) x^{5a^2+b^2+\frac{(2c+1)^2+(2d+1)^2}{4}} y^{5a+b},$$

où il faut étendre la sommation à toutes les valeurs de a, b, c, d, pour lesquelles les exposants de x sont congruents à $\pm 2 \pmod 5$. Les résultats relatifs à la théorie des nombres qui découlent immédiatement de ces équations et que nous n'étudierons pas en détail, ne pourraient pas s'obtenir facilement par une méthode purement arithmétique.

Rostock, le 17 Avril 1883.

SUR LES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE

PAR

C. LE PAIGE

À LIÈGE.

Nous nous proposons de développer, dans ce mémoire, les modes de construction de la surface du troisième ordre, définie par dix-neuf points, que nous avons fait connaître fort rapidement dans deux notes insérées aux *Comptes-Rendus.* (¹)

La question que nous traitons nous paraît assez neuve pour mériter peut-être un accueil favorable des Géomètres.

En effet, les travaux de CHASLES sur les courbes du troisième ordre, suivis des remarquables mémoires de MM. DE JONQUIÈRES, KORTUM, etc. ont permis d'aborder les constructions des courbes des degrés supérieurs. (²)

Pour les surfaces, le champ parcouru est moins vaste.

Les constructions de la surface du second ordre, données par HESSE, SEYDEWITZ, SCHROETER, STEINER et quelques autres, sont, pensons-nous, les seules connues lorsque la surface est définie par la condition générale de la connaissance de points en nombre suffisant. (³)

(¹) C. R. 2 et 16 Juillet 1883.

(²) Dans cette voie, on peut signaler d'intéressantes recherches dues à MM. DEWULF et SCHOUTE.

(³) Ce n'est pas le lieu de mentionner les modes divers de transformation qui laissent déduire, d'une surface connue, des surfaces d'un degré supérieur: dans certains cas particuliers, cette méthode permet de résoudre le problème de la description des surfaces et des courbes gauches. Nous signalerons cependant, en particulier, les célèbres méthodes de M. CREMONA, certains mémoires de M. SALTEL et des travaux récents et fort intéressants dûs à MM. VANĚČEK.

Le caractère des méthodes de Hesse et de Schroeter est bien différent. Tandis que la première s'appuie sur les propriétés de l'involution, la seconde a recours au mode de génération par les systèmes réciproques de Möbius.

Cette dernière voie a été suivie par M. G. von Escherich, professeur à Graz, dans deux mémoires où il expose un mode général de description des surfaces supérieures à l'aide de systèmes réciproques. [1]

Ces mémoires ne contiennent qu'une analyse succincte de la méthode suivie et une indication rapide des résultats qu'elle permet d'obtenir, mais leur contenu nous révèle assez toute la fécondité du procédé employé. L'auteur nous y fait espérer qu'il publiera bientôt des recherches plus détaillées.

Peut-être pourrons-nous mentionner les travaux que nous avons consacrés, depuis plusieurs années déjà, aux courbes et aux surfaces des ordres supérieurs.

Nous avons essayé de faire usage des méthodes que mettent à notre disposition les systèmes d'éléments formant des involutions et des homographies d'ordres et de rangs quelconques.

Simultanément avec notre savant ami, M. Emile Weyr, nous avons tâché de développer cette idée des involutions, due au génie de Poncelet, et dont M. de Jonquières a, le premier, montré toute la valeur; nous avons, pour cela, résolu quelques uns des problèmes fondamentaux que ces involutions présentent et obtenu ainsi des moyens qui permettent d'effectuer un grand nombre de constructions.

Jusqu'à ces derniers temps, nous nous étions borné à faire connaître l'application de ces procédés à la détermination des courbes du troisième ordre et du quatrième, définies respectivement par neuf ou quatorze points: cependant il est facile de voir que le principe général permet de construire les courbes du n^{me} ordre, dès que l'on connaît la construction de celles du $(n - 1)^{me}$.

Nous avons fait voir récemment que ces méthodes sont applicables aux surfaces.

---

(1) Sitzungsberichte der k, Wiener Akademie, Bd LXXXV, p. 526 et 893. Ces travaux nous étaient inconnus quand nous avons publié notre méthode: nous les devons à une obligeante communication de M. v. Escherich.

C'est ainsi que l'emploi de l'involution et de l'homographie du troisième ordre, conduit à une détermination fort rapide et qui, croyons-nous, n'est pas dénuée d'élégance, de la surface du second ordre.

Les mêmes principes ont été employés par nous, dans les deux notes signalées plus haut, à la construction de la surface du troisième ordre.

C'est ce dernier problème que nous voulons exposer ici avec tous les développements nécessaires.

Nous avons fait usage, comme nous venons de le dire, de l'involution et de l'homographie du troisième ordre et du second rang que nous avons étudiées avec détail dans des travaux antérieurs. [1]

Les propriétés de l'involution doivent néanmoins être exposées d'une manière spéciale pour conduire le plus rapidement possible au but que nous nous proposons; aussi, pour ne pas interrompre plus loin notre solution, nous diviserons cette étude en deux parties.

Dans la première, nous ferons connaître les propriétés des cubiques gauches et planes, et nous résoudrons les problèmes relatifs à ces courbes, que nous devrons employer.

Nous devrons donc y reproduire quelques résultats dûs à d'autres Géomètres ou à nous même: néanmoins cette partie contiendra aussi quelques choses nouvelles.

I.

Nous considérerons, en général, comme supports des séries de points, soit une conique C_2, soit une cubique gauche R_3, en partant de ce fait que les points de ces courbes peuvent s'obtenir individuellement et que les points de C_2 peuvent correspondre uniformément aux points de R_3.

Il en résulte immédiatement que pour définir une involution quadratique sur R_3, il suffit de construire tous les plans d'un faisceau dont l'axe rencontre R_3.

Cette simple remarque conduit à la description d'une R_3 par points.

---

[1] *Essais de Géométrie supérieure du troisième ordre* (Liège 1882).

En effet, imaginons que l'on se donne, sur R_3, six points AB, $A'B'$, MM'.

Les plans $\overline{ABM}$, $\overline{A'B'M}$ se coupent suivant une droite x qui caractérisera l'involution I_1^2 définie par les deux couples.

De même $\overline{AB'M}$, $\overline{A'BM}$ donneront une droite y.

Soit $\omega \equiv xy$.

Ce plan qui coupe déjà R_3 en M, rencontre la cubique en deux points qui marquent le couple commun aux deux involutions AB, $A'B'$; AB' $A'B$.

Si nous faisons les constructions analogues en nous servant du point M', nous obtenons un plan ω'.

ω et ω' se coupent suivant une droite d, toujours réelle, qui passe par les deux points communs aux involutions quadratiques.

Tout autre point M'' de R_3 aurait donné un plan ω'' passant par d.

En conséquence, pour construire de nouveaux points de R_3, il suffit de mener par la droite d, définie comme il vient d'être dit, un plan ω''.

Ce plan ω'' rencontre les droites $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ en des points C, D, et les droites $\overline{AB'}$, $\overline{A'B}$ en des points C', D'. Les droites $\overline{CD}$, $\overline{C'D'}$ se coupent en un point M'' de R_3.

Cette construction de la cubique gauche, connue d'ailleurs, se justifie aisément par de simples considérations géométriques.

Il est facile, d'après cela, de construire les éléments doubles d'une involution donnée par deux couples AA', BB'.

Il suffira, en effet, de construire le couple commun aux deux involutions définies par les couples AB, $A'B'$; AB', $A'B$: ce couple sera ainsi représenté par une droite réelle.

Si les couples AA', BB' étaient imaginaires, on pourrait employer l'artifice suivant.

Par un point D de R_3, on mène une droite s'appuyant sur les deux droites réelles $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$. Soit r cette droite. Tous les plans du faisceau r coupent R_3 en des couples de l'involution donnée: il suffira donc de déterminer des couples réels de cette involution, pour appliquer la solution précédente.

On peut encore se proposer de déterminer les éléments unis de deux séries projectives dont on connaît trois couples AA', BB', CC'.

Il suffira de chercher le couple commun aux involutions (AB', BA'), (AC', CA'): on pourra, comme on l'a vu, construire la sécante de R_3, qui marque ce couple sur la courbe.

Voyons maintenant comment on peut résoudre, sur une R_3, les principaux problèmes relatifs à une I_2^3.[1]

Tous les plans d'une gerbe P coupent R_3 en des ternes de points qui appartiennent à une I_2^3. Chaque couple de points, pris sur R_3, détermine avec P un plan, permettant de construire le troisième point du terne.

D'un autre côté, une I_2^3, étant définie par trois groupes de trois éléments, caractérisera une gerbe, dont le sommet est le point d'intersection des plans contenant les ternes de points.

D'après ce que nous avons vu ces ternes peuvent être composés d'un point défini individuellement et d'un groupe de deux points qui peuvent être imaginaires.

En effet, un couple de points peut toujours être regardé comme le couple commun à deux I_1^2, ou comme les éléments doubles d'une I_1^2, ou comme les éléments unis d'une H_1^2: dans ces trois cas, nous avons appris à construire la sécante de R_3 qui les contient.

Cette sécante et le point donné suffisent pour déterminer un plan.

L'involution I_2^3 possède un couple d'éléments neutres; ce couple est marqué par la sécante de R_3, menée par P.

Or, pour construire celle-ci, il suffit d'observer que les éléments neutres constituent le couple commun à toutes les involutions quadratiques correspondant, dans une I_2^3, à tous les points du support.

Prenons, sur R_3, des points M, M'; ensuite menons des plans $PMAB$, $PMA'B'$. $M'AB$, $M'A'B'$ se coupent suivant une droite $M'X$.

Par PM', menons des plans $PM'A_1B_1$, $PM'A_1'B_1'$. MA_1B_1, $MA_1'B_1'$ se coupent suivant une droite MY. PMY, $PM'X$ se coupent suivant une droite PZ, qui est la droite cherchée.

Il suffira encore, pour ce qui va suivre, de savoir déterminer un groupe de trois points, sur une R_3, sans construire les point individuellement.

---

(1) Vois, sur ce sujet, divers mémoires dûs à MM. Appell, R. Sturm et Em. Weyr.

Un groupe de trois points peut toujours être regardé comme le groupe commun à trois I_2^3.

Or, nous pouvons déterminer les sommets des gerbes qui caractérisent les involutions données, et le plan des trois sommets sera le plan cherché.

Pour résoudre les problèmes que nous rencontrerons dans la suite, il sera nécessaire de faire correspondre point par point une R_3 à une droite.

Or il est évident qu'un faisceau de plans, dont l'axe est une sécante de R_3, projette uniformément tous les points de la courbe sur une droite quelconque.

L'on aura souvent à définir les deux points d'intersection d'un plan avec une R_3, lorsque l'on connaît un point de R_3 situé dans ce plan. Ce couple peut être regardé comme les éléments communs à deux involutions quadratiques dont les axes, situés dans le plan, passent par le point d'intersection connu *à priori*. Ces involutions se déterminent aisément, et, par un des problèmes résolus précédemment, il est alors facile de construire la droite qui contient les deux intersections inconnues.

Cette détermination est nécessaire parceque, à l'aide du mode de représentation que nous venons d'indiquer, on pourra définir, sur une droite, les deux points d'intersection que nous avons caractérisés.

On devra faire usage de ces procédés chaque fois qu'il s'agira des involutions I_1^3. En effet tous les plans d'un faisceau coupent R_3 en des ternes de points qui appartiennent à une involution cubique du premier rang.

La détermination du groupe commun à deux I_1^2 permet, on le voit, de trouver sur R_3, les images réelles ou imaginaires des points où une droite réelle rencontre une conique. Il faudra, pour cela, établir la correspondance entre le points de R_3 et ceux de la droite, puis regarder la conique comme engendrée par deux faisceaux homographiques. Ces faisceaux marquent sur la droite deux séries projectives dont les éléments unis seront les points cherchés.

Le probléme n'exige de considérations particulières que dans le cas où la conique est définie par quatre points imaginaires (conjugués deux à deux) et un point réel.

Soient D, D'; D_1, D'_1 les deux couples de points imaginaires définis sur deux droites d, d_1, et A, le point réel.

Soit P l'intersection des droites d et d_1.

Il est facile de construire les conjugués harmoniques R et S de P par rapport aux deux couples imaginaires. $RS \equiv p$ est la polaire de P.

PA coupe p en X et si B est le conjugué harmonique de A par rapport à PX, B appartient à la conique. Le pôle de AB est situé sur p.

Maintenant il est facile d'obtenir les points EF où p rencontre la courbe.

Si de EF on projetait tous les points de la courbe sur d, on obtiendrait une involution dont les points doubles seraient D, D'. De même pour d_1.

Donc si de A, on projette sur p les involutions dont les points doubles sont D, D'; D_1, D'_1, le groupe commun sera EF.

Il n'est évidemment pas nécessaire de construire individuellement les points EF pour obtenir des couples de l'involution dont ces points sont les éléments doubles.

En projetant ces couples de A et B, on obtient deux faisceaux projectifs qui engendrent la conique.

Nous pouvons maintenant aborder le problème suivant: *Construire les points d'intersection d'une droite avec une cubique définie par neuf points.*

Pour traiter le problème avec toute la généralité désirable, nous supposerons que parmi les neuf points, il y en ait huit A, A'; B, B'; C, C'; D, D' définis par couples sur quatre droites réelles a, b, c, d. Soit P le neuvième point.

Nous supposerons d'abord que les quatre droites a, b, c, d ne concourent pas en P.

Considérons les cubiques décomposables

$$a(PBB'CC'), \qquad b(PAA'CC'), \qquad c(PAA'BB').$$

Ces cubiques marquent sur la droite donnée l, trois ternes de points caractérisant une I_2^3.

Nous pourrons toujours représenter ces ternes sur R_3, et cela à l'aide de simples constructions linéaires: nous définirons donc aisément le sommet de la gerbe qui caractérise l'involution.

Si nous répétons les constructions analogues pour les groupes $PAA'BB'DD'$, $PAA'CC'DD'$, nous obtiendrons sur R_3 deux autres I_2^3 et le groupe commun aux trois I_2^3 sera le terne cherché.

Dans les problèmes que nous aurons à traiter, il ne sera jamais nécessaire de déterminer les points du terne individuellement: la connaissance du plan qui les contient suffira toujours.

Imaginons maintenant que les quatre droites a, b, c, d concourent au neuvième point donné P.

Prenons les conjugués harmoniques A_1, B_1, C_1, D_1 de P par rapport aux quatre couples AA', BB', CC', DD'. $(PA_1B_1C_1D_1)$ définit une conique, polaire de P par rapport à la cubique à construire. La tangente en P, PX, à cette conique est aussi tangente à la cubique.

Il est facile, d'après ce que nous avons vu, de définir, sur PX, les ternes de points marqués par des cubiques passant par les huit points $AA'BB'CC'DD'$ en choisissant des neuvièmes points P_1, P_2, ... différents de P.

Toutes ces cubiques marquent sur PX des groupes en I_1^3.

Cette involution a un point double en P. Il suffira de déterminer le point de ramification O correspondant: ce point de ramification est, sur la cubique à construire, le point tangentiel de P.

On obtiendra aussi aisément le point tangentiel O_1 de O, par des constructions linéaires. A l'aide de O_1 et des points donnés, on appliquera la première solution.

Nous aurons encore à nous poser la question suivante:

Problème II. *Construire une cubique passant par trois points donnés et appartenant à un système triplement infini défini par quatre cubiques données.*

Soient C_3, C_3', C_3'', C_3''' les cubiques définissant le système et A, B, C les trois points donnés.

Toutes les cubiques du système, passant par A, appartiennent à un système doublement infini, qui sera caractérisé par trois courbes.

On peut choisir pour cela les courbes passant par A et respectivement par les intersections de C_3 avec C_3', C_3'', C_3'''. Il est inutile de faire voir comment ces courbes pourront se construire: les méthodes exposées jusqu'ici suffisent amplement: nous pourrons observer d'ailleurs qu'il ne s'agit que d'obtenir sur R_3, les images des points où une de ces cubiques est coupée par une droite l.

Ces trois cubiques définissent un système en I_2^3 auquel appartient la cubique cherchée.

Il suffira de compléter, dans l'involution marquée sur $\overline{BC}$, le terne dont on connaît les éléments B, C. Nous trouverons ainsi un point A'.

La répétition du même procédé donnera autant de points de la courbe que l'on voudra.

Au surplus, s'il fallait construire les intersections de cette courbe avec une droite quelconque l, nous pourrions en employant successivement A, B, C, trouver sur l trois involutions I_2^3, dont le groupe commun serait le groupe cherché. (1)

Comme nous le verrons, il pourra être utile de construire d'une manière continue une surface du second ordre: nous rappellerons rapidement la solution que nous avons fait connaître.

Elle repose sur les propriétés suivantes:

I. Soient A, B, C trois points d'une surface du second ordre S_2, σ leur plan.

A, B, C déterminent trois plans tangents α, β, γ qui se coupent en un point P.

Les jonctions de P avec BC, CA, AB sont trois plans α', β', γ'.

I'. Soient α, β, γ trois plans tangents à une surface de la seconde classe Σ_2, S leur intersection.

α, β, γ déterminent trois points de contact A, B, C qui se trouvent dans un plan ω.

Les intersections de ω avec $\overline{\beta\gamma}$, $\overline{\gamma\alpha}$, $\overline{\alpha\beta}$ sont trois points A', B', C'.

---

(1) Si la construction précédente ne paraissait pas suffisamment justifiée, le court raisonnement suivant la démontrerait.

Soit

$$\lambda C_3 + \lambda' C_3' + \lambda'' C_3'' + \lambda''' C_3''' = 0,$$

l'équation qui définit le système triplement infini, et marquons par $(C_3^i)_0$ le résultat de la substitution dans C_3^i des coordonnées du point A.

On devrait donc avoir, pour toutes les courbes passant par A,

$$\lambda (C_3)_0 + \lambda' (C_3')_0 + \lambda'' (C_3'')_0 + \lambda''' (C_3''')_0 = 0.$$

L'équation des courbes passant par A devient donc en éliminant λ:

$$\lambda' [C_3' (C_3)_0 - C_3 (C_3')_0] + \lambda'' [C_3'' (C_3)_0 - C_3 (C_3'')_0] + \lambda''' [C_3''' (C_3)_0 - C_3 (C_3''')_0] = 0;$$

or la forme même de l'équation de ces courbes suffit pour établir les constructions dont nous avons fait usage.

$\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ sont deux trièdres homologiques dont l' est l'axe d'homologie.

Les jonctions des points de S_2 avec les droites BC, CA, AB forment trois faisceaux qui coupent l' suivant trois ponctuelles en I_2^3.

II. Si l'on joint, de toutes les manières possibles, les cotés a, b, c, d'un triangle à trois points PQR d'une droite l non située dans le plan du triangle, on obtient six points A_1, A_2, ... A_6. Ces six points sont sur une conique.

ABC, $A'B'C'$ sont deux triangles homologiques dont l est l'axe d'homologie.

Les intersections des plans tangents à Σ_2 avec $\overline{\beta\gamma}$, $\overline{\gamma\alpha}$, $\overline{\alpha\beta}$ sont trois ponctuelles dont les jonctions avec l forment trois faisceaux en I_2^3.

II'. Si l'on coupe, de toutes les manières possibles les arêtes a, b, c d'un trièdre par trois plans ω, $\varkappa$, ρ menés par une droite l, ne passant pas par le sommet du trièdre, on obtient six plans α_1, α_2, ... α_6 tangents à un cône du second degré.

À l'aide des neuf points donnés, on construit aisément [1] les trièdres $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ dont il est question au théorème I, et, par suite, la droite l'.

Alors chaque point M de la surface, joint à $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ donne trois plans qui coupent l' en trois points PQR de l'involution I_2^3.

L'involution étant formée de groupes symétriques, on peut permuter de toutes les manières possibles les points PQR, sans que les différentes permutations cessent de donner des points de la surface.

On en obtient, de cette façon, six qui, d'après le théorème II, sont situés sur une conique et, par suite, donnent une section plane tout entière de la surface.

Chaque point de S_2 donne ainsi naissance à une section plane et il est bien facile de faire voir que toutes ces sections sont situées dans des plans passant par une droite fixe (la droite l du théorème II').

La construction tout à fait analogue s'applique aux surfaces de la seconde classe.

Pour montrer comment on peut, par ce procédé, construire autant de points, et par suite de sections planes, qu'on le veut, de la surface, il reste à faire connaître la détermination de nouveaux ternes de l'involution marquée sur l'.

[1] V. les notes que nous avons publiées aux Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 3me série, t. V (1883).

Or cette involution a évidemment pour points triples le point où l' perce le plan σ et ceux où elle rencontre S_2.

De plus, il est visible que le point de rencontre de l' avec σ et le point P, compté deux fois, constituent un terne de l'involution. En outre chaque point connu de la surface donne un terne de l'involution.

On se trouve donc en présence de ce problème: *Construire des ternes d'une involution I_2^3 dont on connaît un point triple a_1, un groupe composé de a_1 et du point α_1 conjugué harmonique de a_1 par rapport aux deux autres points triples a_2, a_3, et un terne xyz.* Dans le cas actuel, il sera plus commode de supposer que les éléments donnés sont représentés sur une conique C_2.

Les tangentes à C_2 en a_1 et α_1 se coupent en un point t.

Si nous menons $\overline{xt}$ qui rencontre C_2 en p, les deux droites $\overline{a_1p}$, $\overline{yz}$ se coupent en un point k.

La droite $\overline{tk}$ est la hessienne des points triples.

On est donc ramené à construire des ternes d'une I_2^3 dont on connaît un point triple a_1 et les éléments neutres.

Soit, par exemple, $x'y'$ un couple qu'il s'agit de compléter. $\overline{x't}$ coupe C_2 en p'. $\overline{a_1p'}$ coupe $\overline{tk}$ en k' et $k'y'$ coupe C_2 au point cherché z'.(¹)

Les constructions que nous avons exposées dans cette première partie sont toutes, on le voit, purement linéaires.

II.

Nous possédons maintenant tous les éléments nécessaires pour aborder les questions relatives aux surfaces du troisième ordre.

Comme on le sait depuis longtemps cette surface peut être engendrée par les intersections de trois faisceaux de plans, liés par une relation homographique du troisième ordre et du second rang.

Cette méthode, qui a été développée par M. August peut être regardée comme un cas particulier de la seconde méthode de Steiner.

(¹) Pour justifier cette construction, voir nos *Essais de Géom. sup. du 3^{me} ordre*, p. 80.

Soient X, Y, Z les axes des trois faisceaux de plans: ces trois droites appartiennent à la surface. L'homographie H_2^3 étant caractérisée par sept ternes, il suffira de connaître sept points de la surface S_3 pour définir cette dernière.

Désignons respectivement par $\xi_i\eta_i\zeta_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots 6$) les sept ternes de plans passant par les droites x, y, z, et par A_i le point d'intersection des trois plans d'un terne.

Si par A_0, nous menons trois droites arbitraires x', y', z', les plans ξ_i, η_i, ζ_i marquent sur ces droites des points X_i, Y_i, Z_i ($i = 1, 2, 3, \dots 6$).

Nous obtenons ainsi six plans $X_iY_iZ_i \equiv \beta_i$.

Ces six plans β_i et les trois faces du trièdre $x'y'z'$ sont neuf plans qui caractérisent une surface de la seconde classe Σ_2.

Tous les plans tangents à cette surface marquent sur $x'y'z'$ des ternes de points appartenant à une H_2^3. En effet deux points quelconques X_kY_k définissent un plan tangent et par suite un point Z_k.

Or cette homographie sera identique avec celle qui est marquée, sur ces mêmes droites, par tous les ternes de plans qui joignent les points de S_3 aux trois axes x, y, z.

Nous avons donc cette propriété:

»Si par un point A_0 d'une surface du troisième ordre, on mène trois droites arbitraires $x'y'z'$ les ternes de plans qui joignent tous les points de la surface à trois droites de celle-ci, x, y, z, ne se rencontrant pas deux à deux, marquent sur $x'y'z'$ des ternes de points dont les jonctions enveloppent une surface de la seconde classe tangente aux faces du trièdre $x'y'z'$.»

En d'autres termes:

Si un tétraèdre se déforme de telle façon que trois de ses faces passent par trois droites fixes, tandis que la quatrième reste tangente à une surface de la seconde classe Σ_2, et que trois de ses sommets parcourent trois droites concourantes formant un trièdre dont les faces soient tangentes à Σ_2, le quatrième sommet décrit une surface du troisième ordre passant par les trois droites fixes et par le sommet du trièdre.

Il résulte de là et de la construction que nous avons fait connaître plus haut de la surface du second ordre ou de la seconde classe, que nous pourrons construire autant de points que nous voudrons de la surface du troisième ordre.

Chaque plan tangent à Σ_2 donne naissance à six plans tangents passant par un point fixe et circonscrits à un cône du second ordre qui touche Σ_2.

Par conséquent, nous pouvons observer que chaque point que l'on détermine de la surface S_3, donne naissance à une courbe gauche G_6 de genre o, puisque chacun de ses points correspond à un plan tangent du cône du second degré.

Nous avons tantôt signalé les deux droites l et l', employées dans la construction des surfaces du second ordre.

Il est facile de voir que tous les cônes dont il s'agit ici ont leurs sommets sur la droite l' et que, par suite, les plans des courbes de contact avec Σ_2 passent par l.

Lorsqu'un plan tangent de Σ_2 tourne autour d'une génératrice de cette surface, il ne cesse pas de donner des points de S_3. D'après un théorème de CHASLES, les points correspondant aux différentes positions du plan tangent sont situés sur une cubique gauche R_3. Cette cubique passe par A_0.

Nous pouvons observer que par chaque point de Σ_2 passent deux génératrices auxquelles correspondent deux R_3 situées sur S_3. Ces deux courbes passent toutes deux par A_0 et ont en outre un second point commun correspondant au plan tangent déterminé par les deux génératrices des deux systèmes.

On obtient ainsi sur S_3, deux systèmes de courbes R_3 qui jouent le même rôle que les génératrices des deux modes de Σ_2.

On voit qu'il serait facile de développer ce sujet, connu d'ailleurs. Nous pouvons faire une autre remarque.

Si nous considérons les trois faisceaux de plans, dont les intersections engendrent S_3, ces faisceaux marquent, sur une droite quelconque l, trois ponctuelles en H_2^3. Nous pouvons observer que dans chaque faisceaux existent deux éléments neutres: les six plans ainsi déterminés forment deux trièdres qui, outre les trois axes des faisceaux, donnent naissance à six autres droites situées sur S_3.

Lorsque la droite l, dont nous venons de parler, au lieu d'être arbitraire, passe par les sommets des deux trièdres conjugués, les plans des faisceaux x, y, z marquent, sur l, trois séries en H_2^3 pour lesquelles les éléments neutres des trois séries coïncident. Par suite, on a une involution I_2^3.

Les points unis de cette I_2^3 sont ceux où l rencontre S_3.

Supposons maintenant que l'on joigne x, y, z à un point M de S_3; on obtiendra, sur l, un terne PQR de l'involution. Les éléments d'une I_2^3 étant permutables, on pourra, en les joignant de toutes les manières possibles à x, y, z, construire cinq autres points de S_3.

En outre, il est possible de former avec les neuf droites des deux trièdres six ternes de droites que l'on peut regarder comme axes de trois faisceaux décrivant S_3. Ces faisceaux marqueront également des I_2^3 sur l et ces I_2^3 seront toutes identiques entre elles puisqu'elles auront les mêmes points triples.

Il en résulte que si l'on joint PQR aux droites d'un des ternes, on obtiendra six nouveaux points de S_3.

En résumé, lorsque l'on connaît deux trièdres conjugués, chaque point de la surface permet d'en déterminer trente-cinq autres par de simples constructions de plans. Les points de S_3 s'associent donc par groupes de trente-six.

Peut-être un jour reviendrons-nous sur ce sujet: pour le moment, reprenons la question que nous nous sommes proposée.

Nous devrons d'abord résoudre le problème suivant:

Construire la section, par un plan quelconque, d'une surface du troisième ordre dont on connaît trois droites et sept points.

Or, rien n'est plus aisé, d'après ce qui précède.

En effet, soit ω un plan quelconque: ce plan est rencontré par x, y, z en trois points A, B, C qui appartiennent à la section.

Tout plan passant par x coupe ω suivant une droite m. Or, à ce plan correspond, dans H_2^3, une H_1^2 facile à déterminer par ce que nous avons vu, et dont les plans correspondants engendrent, par leurs intersections, une surface du second ordre. Celle-ci coupe ω suivant une conique qui correspond à m.

On obtient donc, sur m, deux points réels ou imaginaires.

Comme on le voit, la section est une cubique engendrée par la méthode de Chasles. Néanmoins, on peut en construire *linéairement* autant de points qu'on le veut, en faisant usage des procédés que nous avons indiqués au commencement de cette note.

Mais il résulte encore de ce problème que l'on peut, sans difficulté, trouver sur une R_3 choisie une fois pour toutes, la représentation du

groupe de trois points où une droite l rencontre la surface définie comme il vient d'être dit.

Il suffira, par l, de mener un plan ω, puis d'appliquer la méthode de la page 187.

Supposons maintenant que *la surface soit définie par une droite, trois groupes de trois points situés en ligne droite et six autres points.*

Soit l_1 la droite donnée,

$PP'P''$, trois points situés sur une droite l_2,
$QQ'Q''$, » » » » » » l_3,
$RR'R''$ » » » » » » l_4,

et $ABCDEF$ les six points donnés.

Nous devrons construire les intersections d'une droite l avec une surface ainsi définie.

Or considérons les surfaces caractérisées par les éléments:

$l_1 l_2 l_3$; $RR'R''ABCD$, et appelons cette surface S_3,
$l_1 l_3 l_4$; $PP'P''ABCD$, » » » » S'_3,
$l_1 l_4 l_2$; $QQ'Q''ABCD$, » » » » S''_3.

Ces trois surfaces sont définies comme dans le premier cas; par conséquent, il est facile de construire les plans α, α', α'' qui rencontrent la courbe R_3 en des points représentant les intersections de ces surfaces par la droite l.

Les surfaces S_3, S'_3, S''_3 définissent une I_2^3 à laquelle appartient la surface à construire Σ_3 et caractérisée par une gerbe G, dont le sommet est donné par les plans α, α', α''.

En employant, au lieu de $ABCD$, les éléments $ABCE$, $ABCF$, nous obtenons deux autres gerbes G', G'', et le plan $GG'G''$ coupe R_3 aux trois images des intersections de l et de Σ_3.

S'il s'agissait d'achever la construction de la surface Σ_3, on pourrait mener un plan quelconque par un des points donnés, par exemple F. Dans ce plan, et par F, on mènerait des droites sur lesquelles on déterminerait des couples de points appartenant à Σ_3. Il serait aisé, en employant un des problèmes de la première partie, de construire *linéairement* autant de points qu'on le voudrait, de la section plane. En menant tous les plans de la gerbe F on achèverait la surface.

Nous aborderons maintenant cette autre question:

Construire une surface du troisième ordre dont on connaît une droite, trois points en ligne droite et douze autres points.

Soit l_1 la droite donnée,

$$PP'P'', \text{ situés sur une droite } l_2,$$

$ABCDEFGHIKLM$, les douze points donnés.

Considérons les droites l_1, l_2, $AB \equiv l_3$, $CD \equiv l_4$, et les six points $EFGHIK$.

D'après ce qui vient d'être dit, nous pourrons considérer ces éléments comme caractérisant une surface S_3, et déterminer le plan α qui coupe R_3 aux points-images des intersections d'une droite l avec S_3.

En employant successivement $AC \equiv l'_3$, $BD \equiv l'_4$, et $AD \equiv l''_3$, $BC \equiv l''_4$, nous aurons des surfaces S'_3, S''_3, et des plans α', α''.

$\alpha\alpha'\alpha''$ donnent une gerbe G_1.

Si au lieu d'employer $EFGHIK$, nous employons successivement $EFGHIL$, $EFGHIM$, nous aurons de même des gerbes G'_1, G''_1.

Le plan $G_1 G'_1 G''_1$, marquera, sur R_3, les images des intersections de l avec la surface à construire.

S'il fallait achever la surface, par le point M par exemple, nous ferions passer un plan; dans ce plan, et par M, nous mènerions des droites l.

Le problème qui vient d'être résolu permettrait de définir, sur une de ces droites l, les deux autres intersections de la droite avec la surface cherchée: alors, en agissant comme plus haut, on achèverait la section plane et, par suite, la surface.

Nous sommes maintenant amené à cette autre question: *Construire une surface du troisième ordre dont on connait trois points en ligne droite et seize autres points.*

Soient $RR'R''$ situés sur une droite l_1 et $ABCDEFGHIKLMNOPQ$, les points donnés.

En considérant l_1 comme une droite de la surface, $AB \equiv l_2$ comme une seconde droite contenant trois points de la surface et les douze points $CDEFGHIKLMNO$, on peut, par le problème précédent, construire une surface S_3 définie par ces éléments.

On sait donc déterminer, sur une droite l quelconque, les points où S_3 rencontre cette droite.

D'autres combinaisons des mêmes éléments donnent des surfaces S_3', S_3'' qui avec S_3 définissent un système en I_2^3.

À ce système appartient la surface cherchée Σ_3.

On voit qu'il suffit de répéter les raisonnements que nous avons faits déjà: en effet, en remplaçant successivement, dans les éléments caractéristiques, O par P et Q, on obtiendra deux autres systèmes en I_2^3.

Nous arrivons finalement à la question qui fait l'objet principal de ce travail:

Construire une surface du troisième ordre dont on connaît dix-neuf points.

Soient $RR'R''ABCDEFGHIKLMNOPQ$ les dix-neuf points donnés.

Désignons par Γ le groupe formé des seize derniers points et convenons de représenter par $(\Gamma - X \ldots + Y \ldots)$ le groupe obtenu en retirant de Γ un certain nombre de points et en y ajoutant d'autres.

Alors en prenant successivement des points S, S' situés sur les droites $AB \equiv l_1$; $CD \equiv l_1'$, les éléments

$$l_1,\ (\Gamma - AB + RR'),$$
$$l_1',\ (\Gamma - CD + RR'),$$

déterminent, par le problème précédent deux surfaces S_3, S_3' caractérisant un système en I_1^3 auquel appartient la surface à construire Σ_3.

Si maintenant par R'', on fait passer une droite l, il sera possible de définir, sur cette droite, les deux points réels ou imaginaires où l rencontre S_3.

Si l'on fait pivoter l dans un plan ω, on trouvera, par les problèmes de la première partie, à l'aide de constructions *linéaires,* autant de points que l'on voudra de la section faite par ω.

On peut aborder le même problème d'une façon différente.

Nous supposerons encore que l'on ait résolu le premier problème, c'est-à-dire que l'on sache déterminer une surface cubique dont on connaît trois droites et sept points.

Alors se présentera cette question:

Construire une surface du troisième ordre dont on connaît quatre groupes de trois points en ligne droite et sept autres points.

Soient

$PP'P''$, trois points situés sur une droite l_1,
$QQ'Q''$, » » » » » » l_2,
$RR'R''$, » » » » » » l_3,
$SS'S''$, » » » » » » l_4,

et $A_1A_2A_3ABCD$ sept autres points.

Les trois droites l_1, l_2, l_3 et les sept points $SS'S''ABCD$, déterminent une surface S_3.

De même l_1, l_2, l_4, $RR'R''ABCD$ déterminent une surface S'_3.

On aurait, par les deux autres combinaisons des mêmes éléments, deux surfaces S''_3, S'''_3.

Ces surfaces coupent le plan $\omega \equiv A_1A_2A_3$ suivant quatre cubiques planes C_3, C'_3, C''_3, C'''_3.

Il suffira de construire la cubique appartenant à ce système triplement infini et passant par $A_1A_2A_3$, pour avoir la section de la surface à construire Σ_3 par le plan ω.

Pour aborder les questions suivantes, il sera nécessaire de savoir construire les intersections de Σ_3 et d'une droite quelconque l.

Or, si nous prenons sur cette droite l deux points quelconques X_1Y_1, ces deux points, joints à l_1, l_2, l_3, l_4, $ABCDA_1$, permettront de construire une surface S_3 et par suite de construire le troisième point Z_1 où l rencontre S_3. Cette construction est linéaire.

Nous pourrons, de cette façon, obtenir sur l, une involution I_2^3 caractérisée par les surfaces définies par les éléments donnés sauf A_2, A_3.

En employant successivement A_2 et A_3, au lieu de A_1, on obtiendra trois I_2^3 sur l et le groupe commun à ces trois involutions marquera les intersections cherchées.

Il est bien entendu qu'il ne s'agit encore une fois ici que de construire un plan qui, par ses intersections avec R_3, représenterait les points demandés.

Nous pouvons maintenant aborder directement ce problème:

Construire une surface du troisième ordre dont on connaît trois points en ligne droite et seize autres points.

Soient les points $PP'P''$ situés sur une droite l_1, et

$$ABCDEFGHIJKLMA_1A_2A_3,$$

les seize autres points.

En combinant tous les éléments sauf les derniers $A_1A_2A_3$ de la manière suivante:

l_1, $AB \equiv l_2$, $CD \equiv l_3$, $EF \equiv l_4$, $GHIJKLM$, on obtient par ce qui précède une surface S_3.

D'autres arrangements de ces mêmes éléments donnent des surfaces S_3', S_3'', S_3'''.

On peut toujours obtenir les intersections de ces surfaces par une droite l, c'est-à-dire, si l'on peut s'exprimer ainsi, on peut toujours obtenir virtuellement la section d'une de ces surfaces par un plan ω.

Si l'on choisit pour plan ω le plan $A_1A_2A_3$, il faudra, dans ce plan, construire la cubique d'un système triplement infini passant par $A_1A_2A_3$. Cette section pourra toujours s'obtenir effectivement. En d'autres termes on construira *linéairement* autant de points qu'on le voudra de la section.

Si l'on veut déterminer les intersections de la surface, définie par les dix-neuf éléments donnés, et d'une droite l, il faudra opérer comme pour le problème précédent, c'est-à-dire remplacer les points A_2A_3 par deux points X_1Y_1 situés sur l.

De cette manière, on trouverait un point Z_1. La suite du raisonnement n'a besoin d'être développée.

Nous sommes ramené, on le voit, à l'avant dernier problème traité par la première méthode.

Il n'est donc pas nécessaire d'aller plus loin.

Nous croyons avoir, dans ce mémoire, justifié entièrement toutes les assertions contenues dans nos deux notes insérées aux *Comptes-rendus*.

En effet, nous avons fait voir que l'on peut, étant donnés dix-neuf points dans l'espace, construire *linéairement* autant de points qu'on le veut d'une section, faite, dans la surface cubique définie par ces points, par un plan qui passe par un des dix-neuf points donnés.

Les constructions que nous avons indiquées sont malheureusement un peu longues: bien que, dans un sujet ainsi compliqué, il paraisse difficile

d'obtenir des résultats très-simples, nous espérons que quelque Géomètre, plus heureux, parviendra à une méthode plus facile.

Quoiqu'il en soit, nous osons espérer que ce travail ne paraîtra pas dénué d'intérêt.

Peut-être nous sera-t-il donné de reprendre cette question et d'aborder certains cas particuliers qui méritent d'être examinés.

Aerschot, le 20 Septembre 1883.

EIN NEUER BEWEIS
FÜR DIE RIEMANN'SCHE THETAFORMEL

VON

F. PRYM
in WÜRZBURG.

In einer vor Kurzem erschienenen Arbeit (1) habe ich eine von RIEMANN herrührende fundamentale Thetaformel aufgestellt und bewiesen. Der dort gegebene Beweis war von mir im Jahre 1865 auf die Anregung RIEMANN's hin verfasst worden, und ich glaubte denselben trotz einer gewissen ihm anhaftenden Schwerfälligkeit aus historischen Gründen möglichst unverändert mittheilen zu sollen. Einen zweiten, kürzeren Beweis derselben Formel, der ebenso wie der erste auf functionentheoretischen Betrachtungen beruht, habe ich dann später im CRELLE'schen Journale (2) veröffentlicht. Beiden Beweisen ist indess der Vorwurf zu machen, dass sie das innere Wesen der Formel nicht zum Ausdrucke bringen, insofern als bei ihnen in Folge der angewandten functionentheoretischen Betrachtungen und der dadurch bedingten Anwendung der Methode der unbestimmten Coefficienten der directe Zusammenhang zwischen den beiden Seiten der Formel vollständig verborgen bleibt. Einen Einblick in das wahre Wesen der Formel gewinnt man nur, wenn man zur Ableitung derselben das, zuerst von JACOBI (3) im speciellen Falle der elliptischen

(1) Untersuchungen über die RIEMANN'sche Thetaformel und die RIEMANN'sche Charakteristikentheorie. Leipzig 1882, Teubner.

(2) Kurze Ableitung der RIEMANN'schen Thetaformel. CRELLE's Journal Bd 93, p. 124.

(3) JACOBI, Theorie der elliptischen Functionen, aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet. Gesammelte Werke, Bd I, p. 505. Berlin 1881, Reimer.

Functionen angewandte, Princip der gleichzeitigen linearen Transformation der Variablen und der Summationsbuchstaben zu Grunde legt und damit das Princip der Einschiebung eines Factors verbindet, der, von ähnlicher Wirkung wie der DIRICHLET'sche discontinuirliche Factor bei bestimmten Integralen, die nach geschehener Transformation eingetretene Beschränkung der Summation aufzuheben gestattet. Der Ausführung dieses Gedankens sind die folgenden Seiten gewidmet; dazu mag aber schon jetzt bemerkt werden, dass die Anwendbarkeit der soeben charakterisirten Methode keineswegs auf die RIEMANN'sche Thetaformel beschränkt ist, dass vielmehr die beiden obenerwähnten Principe in ihrer Verbindung von weitgehendster Bedeutung für die Theorie der allgemeinen Thetafunctionen sind, insofern als man mit ihrer Hülfe auf ebenso natürlichem als elementarem Wege eine Fülle der wichtigsten Thetaformeln ableiten kann.

1.

Den Ausgangspunkt für die Theorie der allgemeinen Thetafunctionen bildet die p-fach unendliche Reihe:

$$\vartheta(w_1 \mid w_2 \mid \ldots \mid w_p) = \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2 \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} m_\mu w_\mu}, \qquad a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu},$$

bei der die $\frac{1}{2}p(p+1)$ Constanten $a_{\mu\mu'}$ nur der für die Convergenz der Reihe nothwendigen und hinreichenden Bedingung, dass der reelle Theil von $\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'}$ wesentlich negativ sei, unterworfen sind. Betrachtet man $w_1, \ldots, w_p$ als unabhängig veränderliche Grössen, so stellt diese Reihe eine einwerthige und für endliche w auch stetige Function der complexen Veränderlichen $w_1, \ldots, w_p$ dar, welche den Gleichungen:

$$\vartheta(w_1 \mid \ldots \mid w_\nu + \pi i \mid \ldots \mid w_p) = \vartheta(w_1 \mid \ldots \mid w_\nu \mid \ldots \mid w_p), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

$$\vartheta(w_1 + a_{1\nu} \mid w_2 + a_{2\nu} \mid \ldots \mid w_p + a_{p\nu}) = \vartheta(w_1 \mid w_2 \mid \ldots \mid w_p) e^{-2w_\nu - a_{\nu\nu}},$$

genügt. Erfüllt umgekehrt eine einwerthige und für endliche w auch immer stetige Function $f(w_1 | \dots | w_p)$ der complexen Veränderlichen $w_1, \dots, w_p$ die Bedingungen:

$$f(w_1 | \dots | w_\nu + \pi i | \dots | w_p) = f(w_1 | \dots | w_\nu | \dots | w_p),$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, p)$$

$$f(w_1 + a_{1\nu} | w_2 + a_{2\nu} | \dots | w_p + a_{p\nu}) = f(w_1 | w_2 | \dots | w_p) e^{-2w_\nu - a_{\nu\nu}},$$

so kann sie sich von der Function $\vartheta(w_1 | \dots | w_p)$ nur um einen von den sämmtlichen Grössen w unabhängigen Factor unterscheiden.

Aus der Reihe $\vartheta(w_1 | \dots | w_p)$ entsteht durch Verallgemeinerung die Reihe:

$$\vartheta\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 & \dots & \varepsilon'_p \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_p)$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \dots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \left(m_\mu + \frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\left(m_{\mu'} + \frac{\varepsilon_{\mu'}}{2}\right) + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \left(m_\mu + \frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\left(w_\mu + \frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i\right)},$$

bei der die ε, ε' beliebige ganze Zahlen bezeichnen sollen. Die dadurch definirte neue Function $\vartheta\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 & \dots & \varepsilon'_p \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_p)$ ist dann mit der ursprünglichen Function $\vartheta(w_1 | \dots | w_p)$ verknüpft durch die Gleichung:

$$\vartheta\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 & \dots & \varepsilon'_p \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_p) = \vartheta\left(w_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\varepsilon_\mu}{2} a_{1\mu} + \frac{\varepsilon'_1}{2}\pi i \,\Big|\, \dots \,\Big|\, w_p + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\varepsilon_\mu}{2} a_{p\mu} + \frac{\varepsilon'_p}{2}\pi i\right)$$

$$\times\, e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \frac{\varepsilon_\mu \varepsilon_{\mu'}}{4} + \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \varepsilon_\mu \left(w_\mu + \frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i\right)}$$

und geht, wenn die Grössen ε, ε' sämmtlich den Werth Null annehmen, in dieselbe über, d. h. es ist:

$$\vartheta\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_p) = \vartheta(w_1 | \dots | w_p).$$

Ähnlich wie die ursprüngliche genügt die allgemeinere Function den Gleichungen:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \cdots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}(w_1|\ldots|w_\nu+\pi i|\ldots|w_p) = \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \cdots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}(w_1|\ldots|w_\nu|\ldots|w_p)\,e^{\varepsilon_\nu \pi i},$$

$$(\nu=1,2,\ldots,p)$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \cdots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}(w_1+a_{1\nu}|\ldots|w_p+a_{p\nu}) = \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \cdots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}(w_1|\ldots|w_p)\,e^{-2w_\nu-a_{\nu\nu}-\varepsilon'_\nu\pi i},$$

welche sie zugleich bis auf einen von den Variablen $w_1, \ldots, w_p$ freien Factor bestimmen.

Das Symbol $\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \cdots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}$ wird die Charakteristik der Thetafunction genannt und soll, wenn dadurch kein Missverständniss zu befürchten, abgekürzt durch $\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}$, noch einfacher durch $[\varepsilon]$ bezeichnet werden. Ferner möge es erlaubt sein, wenn die Ausdrücke für die Argumente einer Thetafunction sich nur durch untere Indices unterscheiden, hinter dem Functionszeichen nur den allgemeinen Ausdruck für die Argumente, mit Weglassung des Index, in doppelte Klammern eingeschlossen zu schreiben, also:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((w)) \quad \text{statt} \quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(w_1\,|\ldots|\,w_p),$$

und entsprechend ein Grössensystem $w_1\,|\,w_2\,|\ldots|\,w_p$ einfacher durch (w) zu bezeichnen. Bezeichnet man dann endlich noch das System:

$$w_1+\sum_{\mu=1}^{p}\frac{\varkappa_\mu}{2}a_{1\mu}+\frac{\varkappa'_1}{2}\pi i\;|\;\ldots\;|\;w_p+\sum_{\mu=1}^{p}\frac{\varkappa_\mu}{2}a_{p\mu}+\frac{\varkappa'_p}{2}\pi i,$$

wobei unter den $\varkappa$, $\varkappa'$ ganze Zahlen zu verstehen sind, symbolisch mit $\left(w+\left|\begin{matrix}\varkappa\\ \varkappa'\end{matrix}\right|\right)$, so ergeben sich durch Betrachtung der die Function $\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((w))$ definirenden Reihe leicht die im Späteren zur Anwendung kommenden Relationen:

$$\text{(A)}\quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}\left(\!\!\left(w+\begin{vmatrix}\varkappa\\ \varkappa'\end{vmatrix}\right)\!\!\right)=\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon+\varkappa\\ \varepsilon'+\varkappa'\end{bmatrix}((w))\,e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}a_{\mu\mu'}\frac{\varkappa_\mu\varkappa_{\mu'}}{4}-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varkappa_\mu\left(w_\mu+\frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i+\frac{\varkappa'_\mu}{2}\pi i\right)},$$

$$\text{(B}_1\text{)}\quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\nu\pm 2\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\quad\varepsilon'_\nu\quad\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}((w))=\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\nu\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_\nu\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}((w)),$$

$(\nu=1,2\ldots,$

$$\text{(B}_2\text{)}\quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\quad\varepsilon_\nu\quad\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_\nu\pm 2\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}((w))=(-1)^{\varepsilon_\nu}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\nu\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_\nu\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}((w)),$$

$$\text{(C)}\quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}((-w))=(-1)^{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\varepsilon_\nu\varepsilon'_\nu}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}((w)),$$

aus denen für ganzzahlige λ, λ' noch die Formel:

$$\text{(D)}\quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}\left(\!\!\left(w+\begin{vmatrix}2\lambda\\ 2\lambda'\end{vmatrix}\right)\!\!\right)=\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((w))\,e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}a_{\mu\mu'}\lambda_\mu\lambda_{\mu'}-2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\lambda_\mu w_\mu+\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\lambda'_\mu-\varepsilon'_\mu\lambda_\mu)\pi i}$$

folgt. Die Gleichungen (B$_1$), (B$_2$) zeigen, dass im Ganzen nur 2^{2p} wesentlich verschiedene Functionen $\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((w))$ existiren; als Repräsentanten derselben können diejenigen 2^{2p} angesehen werden, deren Charakteristiken nur die Zahlen 0, 1 als Elemente enthalten; Charakteristiken von dieser Art sollen Normalcharakteristiken genannt werden.

2.

Unter $u_1^{(1)}, \ldots, u_p^{(1)}$; $u_1^{(2)}, \ldots, u_p^{(2)}$; $u_1^{(3)}, \ldots, u_p^{(3)}$; $u_1^{(4)}, \ldots, u_p^{(4)}$ sollen vier Systeme von je p beliebigen Grössen verstanden werden. Bildet man dann das Product der vier in der Form:

$$\vartheta((2u^{(\nu)}))=\sum_{m_1^{(\nu)}=-\infty}^{m_1^{(\nu)}=+\infty}\cdots\sum_{m_p^{(\nu)}=-\infty}^{m_p^{(\nu)}=+\infty}e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}a_{\mu\mu'}m_\mu^{(\nu)}m_{\mu'}^{(\nu)}+4\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}m_\mu^{(\nu)}u_\mu^{(\nu)}}$$

enthaltenen, den Werthen $\nu = 1, 2, 3, 4$ entsprechenden Functionen $\vartheta((2u^{(1)}))$, $\vartheta((2u^{(2)}))$, $\vartheta((2u^{(3)}))$, $\vartheta((2u^{(4)}))$, so erhält man zunächst:

$$\text{(F)}\qquad \vartheta((2u^{(1)}))\,\vartheta((2u^{(2)}))\,\vartheta((2u^{(3)}))\,\vartheta((2u^{(4)}))$$

$$= \sum_{m}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left(m_\mu^{(1)}m_{\mu'}^{(1)} + \ldots + m_\mu^{(4)}m_{\mu'}^{(4)}\right) + 4\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(m_\mu^{(1)}u_\mu^{(1)} + \ldots + m_\mu^{(4)}u_\mu^{(4)}\right)},$$

wobei die Summation auf der rechten Seite in der Weise auszuführen ist, dass jede der $4p$ Grössen m unabhängig von den anderen die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft.

In die rechte Seite der Formel (F) sollen jetzt an Stelle der Grössen m_μ, u_μ allgemein, d. h. für $\mu = 1, 2, \ldots, p$, neue Grössen n_μ, v_μ, eingeführt werden, welche mit denselben verknüpft sind durch die Gleichungen:

$$\text{(S)}\qquad \begin{aligned}
m_\mu^{(1)} + m_\mu^{(2)} + m_\mu^{(3)} + m_\mu^{(4)} &= 2n_\mu^{(1)}, &\qquad u_\mu^{(1)} + u_\mu^{(2)} + u_\mu^{(3)} + u_\mu^{(4)} &= 2v_\mu^{(1)},\\
m_\mu^{(1)} + m_\mu^{(2)} - m_\mu^{(3)} - m_\mu^{(4)} &= 2n_\mu^{(2)}, &\qquad u_\mu^{(1)} + u_\mu^{(2)} - u_\mu^{(3)} - u_\mu^{(4)} &= 2v_\mu^{(2)},\\
m_\mu^{(1)} - m_\mu^{(2)} + m_\mu^{(3)} - m_\mu^{(4)} &= 2n_\mu^{(3)}, &\qquad u_\mu^{(1)} - u_\mu^{(2)} + u_\mu^{(3)} - u_\mu^{(4)} &= 2v_\mu^{(3)},\\
m_\mu^{(1)} - m_\mu^{(2)} - m_\mu^{(3)} + m_\mu^{(4)} &= 2n_\mu^{(4)}, &\qquad u_\mu^{(1)} - u_\mu^{(2)} - u_\mu^{(3)} + u_\mu^{(4)} &= 2v_\mu^{(4)},
\end{aligned}$$

oder auch durch die damit äquivalenten Gleichungen:

$$\text{(S')}\qquad \begin{aligned}
n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)} &= 2m_\mu^{(1)}, &\qquad v_\mu^{(1)} + v_\mu^{(2)} + v_\mu^{(3)} + v_\mu^{(4)} &= 2u_\mu^{(1)},\\
n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} - n_\mu^{(3)} - n_\mu^{(4)} &= 2m_\mu^{(2)}, &\qquad v_\mu^{(1)} + v_\mu^{(2)} - v_\mu^{(3)} - v_\mu^{(4)} &= 2u_\mu^{(2)},\\
n_\mu^{(1)} - n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} - n_\mu^{(4)} &= 2m_\mu^{(3)}, &\qquad v_\mu^{(1)} - v_\mu^{(2)} + v_\mu^{(3)} - v_\mu^{(4)} &= 2u_\mu^{(3)},\\
n_\mu^{(1)} - n_\mu^{(2)} - n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)} &= 2m_\mu^{(4)}, &\qquad v_\mu^{(1)} - v_\mu^{(2)} - v_\mu^{(3)} + v_\mu^{(4)} &= 2u_\mu^{(4)}.
\end{aligned}$$

In Folge dieser zwischen den Grössen m und n wie zwischen den Grössen u und v gesetzten Beziehungen wird das System linearer Gleichungen:

$$x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} = 2y^{(1)},$$

$$x^{(1)} + x^{(2)} - x^{(3)} - x^{(4)} = 2y^{(2)},$$

$$x^{(1)} - x^{(2)} + x^{(3)} - x^{(4)} = 2y^{(3)},$$

$$x^{(1)} - x^{(2)} - x^{(3)} + x^{(4)} = 2y^{(4)},$$

erfüllt, wenn man allgemein, d, h. für $\nu = 1, 2, 3, 4$:

1) $x^{(\nu)}$ durch $m_\mu^{(\nu)}$ und gleichzeitig $y^{(\nu)}$ durch $n_\mu^{(\nu)}$,
2) $x^{(\nu)}$ durch $m_{\mu'}^{(\nu)}$ und gleichzeitig $y^{(\nu)}$ durch $n_{\mu'}^{(\nu)}$,
3) $x^{(\nu)}$ durch $u_\mu^{(\nu)}$ und gleichzeitig $y^{(\nu)}$ durch $v_\mu^{(\nu)}$

ersetzt. Dasselbe System wird daher auch erfüllt, wenn man

4) $x^{(\nu)}$ durch $m_\mu^{(\nu)} + m_{\mu'}^{(\nu)}$ und gleichzeitig $y^{(\nu)}$ durch $n_\mu^{(\nu)} + n_{\mu'}^{(\nu)}$,
5) $x^{(\nu)}$ durch $m_\mu^{(\nu)} + u_\mu^{(\nu)}$ und gleichzeitig $y^{(\nu)}$ durch $n_\mu^{(\nu)} + v_\mu^{(\nu)}$

ersetzt. Nun folgt aber aus dem obigen Systeme:

$$x^{(1)^2} + x^{(2)^2} + x^{(3)^2} + x^{(4)^2} = y^{(1)^2} + y^{(2)^2} + y^{(3)^2} + y^{(4)^2},$$

und es bestehen daher entsprechend den fünf soeben aufgestellten Lösungen die Gleichungen:

$$m_\mu^{(1)^2} + m_\mu^{(2)^2} + m_\mu^{(3)^2} + m_\mu^{(4)^2} = n_\mu^{(1)^2} + n_\mu^{(2)^2} + n_\mu^{(3)^2} + n_\mu^{(4)^2},$$

$$m_{\mu'}^{(1)^2} + m_{\mu'}^{(2)^2} + m_{\mu'}^{(3)^2} + m_{\mu'}^{(4)^2} = n_{\mu'}^{(1)^2} + n_{\mu'}^{(2)^2} + n_{\mu'}^{(3)^2} + n_{\mu'}^{(4)^2},$$

$$u_\mu^{(1)^2} + u_\mu^{(2)^2} + u_\mu^{(3)^2} + u_\mu^{(4)^2} = v_\mu^{(1)^2} + v_\mu^{(2)^2} + v_\mu^{(3)^2} + v_\mu^{(4)^2},$$

$$(m_\mu^{(1)} + m_{\mu'}^{(1)})^2 + \dots + (m_\mu^{(4)} + m_{\mu'}^{(4)})^2 = (n_\mu^{(1)} + n_{\mu'}^{(1)})^2 + \dots + (n_\mu^{(4)} + n_{\mu'}^{(4)})^2,$$

$$(m_\mu^{(1)} + u_\mu^{(1)})^2 + \dots + (m_\mu^{(4)} + u_\mu^{(4)})^2 = (n_\mu^{(1)} + v_\mu^{(1)})^2 + \dots + (n_\mu^{(4)} + v_\mu^{(4)})^2,$$

aus denen durch passende Verbindung schliesslich die Gleichungen:

$$m_\mu^{(1)} m_{\mu'}^{(1)} + m_\mu^{(2)} m_{\mu'}^{(2)} + m_\mu^{(3)} m_{\mu'}^{(3)} + m_\mu^{(4)} m_{\mu'}^{(4)} = n_\mu^{(1)} n_{\mu'}^{(1)} + n_\mu^{(2)} n_{\mu'}^{(2)} + n_\mu^{(3)} n_{\mu'}^{(3)} + n_\mu^{(4)} n_{\mu'}^{(4)},$$

$$m_\mu^{(1)} u_\mu^{(1)} + m_\mu^{(2)} u_\mu^{(2)} + m_\mu^{(3)} u_\mu^{(3)} + m_\mu^{(4)} u_\mu^{(4)} = n_\mu^{(1)} v_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} v_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} v_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)} v_\mu^{(4)}$$

hervorgehen, die für jedes μ und μ' von 1 bis p gelten. Mit Hülfe dieser beiden Gleichungen kann man nun auf der rechten Seite der Formel (F) die Grössen m und u durch die Grössen n und v ersetzen und erhält dann die neue Formel:

$$(\mathrm{F}_1)\qquad \vartheta(\!(2u^{(1)})\!)\,\vartheta(\!(2u^{(2)})\!)\,\vartheta(\!(2u^{(3)})\!)\,\vartheta(\!(2u^{(4)})\!)$$

$$=\sum_n e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left(n_\mu^{(1)}n_{\mu'}^{(1)}+\ldots+n_\mu^{(4)}n_{\mu'}^{(4)}\right)+4\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(n_\mu^{(1)}v_\mu^{(1)}+\ldots+n_\mu^{(4)}v_\mu^{(4)}\right)},$$

wobei jedoch die Art und Weise, wie über die Grössen n zu summiren ist, noch einer näheren Bestimmung bedarf.

Bei der Ausführung der auf der rechten Seite der Formel (F) angedeuteten Summation tritt im allgemeinen Gliede an Stelle des Systems der vier einem beliebigen Index μ entsprechenden Grössen:

$$m_\mu^{(1)},\quad m_\mu^{(2)},\quad m_\mu^{(3)},\quad m_\mu^{(4)}$$

jede Variation zur vierten Classe mit Wiederholung, die man aus den überhaupt existirenden negativen und positiven ganzen Zahlen als Elementen bilden kann, und entsprechend muss daher bei der Ausführung der auf der rechten Seite der Formel (F_1) angedeuteten Summation — da das allgemeine Glied dieser Summe aus dem allgemeinen Gliede der auf der rechten Seite von (F) stehenden Summe durch Einführung der Grössen n, v unmittelbar erhalten wurde — an Stelle des Systems der vier Grössen:

$$n_\mu^{(1)},\quad n_\mu^{(2)},\quad n_\mu^{(3)},\quad n_\mu^{(4)}$$

jedes System von Werthen und jedes nur einmal gesetzt werden, welches sich dafür aus den Gleichungen (S) ergibt, wenn man darin an Stelle des Systems der Grössen m die genannten Variationen treten lässt. Die vier irgend einer solchen Variation entsprechenden Grössen:

$$2n_\mu^{(1)},\quad 2n_\mu^{(2)},\quad 2n_\mu^{(3)},\quad 2n_\mu^{(4)}$$

ind aber, wie die Gleichungen (S) zeigen, entweder sämmtlich gerade

oder sämmtlich ungerade Zahlen, und entsprechend sind daher die vier Grössen:

$$n_\mu^{(1)}, \quad n_\mu^{(2)}, \quad n_\mu^{(3)}, \quad n_\mu^{(4)}$$

entweder sämmtlich ganze oder sämmtlich halbe Zahlen, wenn man unter einer halben Zahl eine in der Form $g + \frac{1}{2}$, wo g eine ganze Zahl bezeichnet, darstellbare Zahl versteht. Für das System dieser vier Grössen n kann aber weder jede aus den ganzen Zahlen, noch auch jede aus den halben Zahlen als Elementen gebildete Variation zur vierten Classe mit Wiederholung auftreten, sondern es können, wie die Gleichungen (S′) zeigen, von allen diesen Variationen nur diejenigen auftreten, für welche die vier auf den linken Seiten der Gleichungen (S′) vorkommenden Verbindungen:

$$n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}, \quad n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} - n_\mu^{(3)} - n_\mu^{(4)},$$

$$n_\mu^{(1)} - n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} - n_\mu^{(4)}, \quad n_\mu^{(1)} - n_\mu^{(2)} - n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}$$

sämmtlich gerade Zahlen sind. Diese Bedingung ist, sobald die vier Grössen n sämmtlich ganze oder sämmtlich halbe Zahlen sind, immer erfüllt, wenn $n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}$ eine gerade Zahl ist. Da aber auch umgekehrt die Gleichungen (S′), sobald man in ihnen an Stelle der vier Grössen:

$$n_\mu^{(1)}, \quad n_\mu^{(2)}, \quad n_\mu^{(3)}, \quad n_\mu^{(4)}$$

irgend vier ganze oder irgend vier halbe Zahlen setzt, für welche $n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}$ eine gerade Zahl ist, immer für die vier Grössen:

$$m_\mu^{(1)}, \quad m_\mu^{(2)}, \quad m_\mu^{(3)}, \quad m_\mu^{(4)}$$

vier bestimmte ganze Zahlen liefern, und zwei verschiedenen Systemen von Zahlen $n_\mu^{(1)}, n_\mu^{(2)}, n_\mu^{(3)}, n_\mu^{(4)}$ stets zwei verschiedene Systeme von Zahlen $m_\mu^{(1)}, m_\mu^{(2)}, m_\mu^{(3)}, m_\mu^{(4)}$ entsprechen, endlich die angestellte Betrachtung für jedes μ von 1 bis p gilt, so ergibt sich schliesslich, dass die auf der rechten Seite der Formel (F_1) angedeutete Summation in der Weise auszuführen ist, dass man im allgemeinen Gliede für jedes μ von 1 bis p an Stelle des Systems der vier Grössen:

$$n_\mu^{(1)}, \quad n_\mu^{(2)}, \quad n_\mu^{(3)}, \quad n_\mu^{(4)}$$

sowohl jede aus den ganzen Zahlen, wie auch jede aus den halben Zahlen als Elementen gebildete Variation zur vierten Classe mit Wiederholung, für welche, im einen wie im anderen Falle, $n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}$ eine gerade Zahl ist, setzt und die Summe der so entstandenen Terme bildet.

Die in Bezug auf die Grössen n auszuführende Summation kann von der ihr anhaftenden Beschränkung, dass $n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}$ immer eine gerade Zahl sein muss, auf folgende Weise befreit werden. Man bezeichne, indem man unter μ eine Zahl aus der Reihe 1, 2, ..., p versteht, mit f_μ den Ausdruck:

$$f_\mu = \frac{1 + (-1)^{n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon'_\mu = 0}^{\varepsilon'_\mu = 1} e^{\left(n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}\right)\varepsilon'_\mu \pi i};$$

die so definirte Grösse f_μ besitzt dann den Werth 1, wenn

$$n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}$$

eine gerade Zahl ist, dagegen den Werth 0, wenn $n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}$ eine ungerade Zahl ist. Setzt man daher weiter:

$$F = f_1 f_2 \ldots f_p = \frac{1}{2^p} \sum_{\varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_p}^{0,1} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \left(n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}\right)\varepsilon'_\mu \pi i},$$

so hat der so gebildete Ausdruck F die Eigenschaft, dass er immer verschwindet, wenn auch nur eine der p den Werthen $\mu = 1, 2, \ldots, p$ entsprechenden Grössen $n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}$ eine ungerade Zahl ist, während er, sobald diese p Grössen sämmtlich gerade Zahlen sind, immer den Werth 1 besitzt. Schiebt man nun diese Grösse F auf der rechten Seite der Formel (F_1) hinter dem Summenzeichen als Factor ein, so darf man alsdann die Summation in der Weise ausführen, dass allgemein, d. h. für $\mu = 1, 2, \ldots, p$, an Stelle des Systems der vier Grössen:

$$n_\mu^{(1)},\quad n_\mu^{(2)},\quad n_\mu^{(3)},\quad n_\mu^{(4)}$$

sowohl jede aus den ganzen Zahlen, wie auch jede aus den halben Zahlen als Elementen gebildete Variation zur vierten Classe mit Wiederholung

tritt, einerlei, ob dafür $n_\mu^{(1)}+n_\mu^{(2)}+n_\mu^{(3)}+n_\mu^{(4)}$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, da bei der neuen Summe alle diejenigen Glieder, für welche die p Grössen $n_\mu^{(1)}+n_\mu^{(2)}+n_\mu^{(3)}+n_\mu^{(4)}$, $\mu=1, 2, \dots, p$, nicht sämmtlich gerade Zahlen sind, und denen daher keine Glieder der ursprünglichen Summe entsprechen, in Folge des bei ihnen stattfindenden Verschwindens des Factors F den Werth Null besitzen, während der Complex der übrig bleibenden Glieder, da bei jedem derselben der Factor F den Werth 1 hat, mit dem Complexe der die ursprüngliche Summe bildenden Glieder identisch ist. Es wird aber an Stelle des Systems der vier Grössen $n_\mu^{(1)}$, $n_\mu^{(2)}$, $n_\mu^{(3)}$, $n_\mu^{(4)}$ sowohl jede aus den ganzen Zahlen, wie auch jede aus den halben Zahlen als Elementen gebildete Variation zur vierten Classe mit Wiederholung treten, wenn man:

$$n_\mu^{(1)}=\bar{n}_\mu^{(1)}+\frac{\varepsilon_\mu}{2},\quad n_\mu^{(2)}=\bar{n}_\mu^{(2)}+\frac{\varepsilon_\mu}{2},\quad n_\mu^{(3)}=\bar{n}_\mu^{(3)}+\frac{\varepsilon_\mu}{2},\quad n_\mu^{(4)}=\bar{n}_\mu^{(4)}+\frac{\varepsilon_\mu}{2}$$

setzt und dann, indem man das eine Mal $\varepsilon_\mu=0$, das andere Mal $\varepsilon_\mu=1$ setzt, in jedem der beiden Fälle die vier Grössen $\bar{n}$ unabhängig von einander alle ganzen Zahlen durchlaufen lässt. Führt man nun auf der rechten Seite der Formel (F_1), nachdem man die mit F bezeichnete Grösse als Factor hinter dem Summenzeichen eingeschoben und die dabei vorkommende Exponentialgrösse mit der schon in der Formel (F_1) stehenden vereinigt hat, an Stelle der Grössen n die Grössen $\bar{n}$ und ε ein und ordnet die Summation in passender Weise an, so erhält man, wenn man zugleich noch linke und rechte Seite mit 2^p multiplicirt, die Formel:

$$(\mathrm{F}_2)\qquad 2^p\,\vartheta(\!(2u^{(1)})\!)\,\vartheta(\!(2u^{(2)})\!)\,\vartheta(\!(2u^{(3)})\!)\,\vartheta(\!(2u^{(4)})\!)=$$

$$\sum_{\substack{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1,\dots,\varepsilon'_p}}^{0,1}\ \sum_{\bar{n}}^{-\infty,\dots,+\infty}\left|\begin{array}{l} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}a_{\mu\mu'}\left[\left(\bar{n}_\mu^{(1)}+\frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\left(\bar{n}_{\mu'}^{(1)}+\frac{\varepsilon_{\mu'}}{2}\right)+\dots+\left(\bar{n}_\mu^{(4)}+\frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\left(\bar{n}_{\mu'}^{(4)}+\frac{\varepsilon_{\mu'}}{2}\right)\right]}\\ \times\, e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left[\left(\bar{n}_\mu^{(1)}+\frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\left(2v_\mu^{(1)}+\frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i\right)+\dots+\left(\bar{n}_\mu^{(4)}+\frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\left(2v_\mu^{(4)}+\frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i\right)\right]}\end{array}\right|$$

wobei die auf der rechten Seite stehende, durch $\sum\limits_{\bar{n}}^{-\infty,\dots,+\infty}$ markirte innere Summation so auszuführen ist, dass jede der $4p$ Grössen $\bar{n}$ unabhängig

von den anderen die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, die ebendaselbst vorkommende äussere Summation dagegen so, dass jede der $2p$ Grössen ε, ε' unabhängig von den anderen die Werthe 0 und 1 annimmt.

Die auf der rechten Seite der Formel (F_2) hinter dem ersten Summenzeichen stehende $4p$-fach unendliche Reihe ist aber, wie ein Blick auf die in Art. 1 aufgestellte, die Function $\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(w)\!)$ definirende Reihe zeigt, identisch mit dem Producte der vier die Functionen:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(2v^{(1)})\!),\qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(2v^{(2)})\!),\qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(2v^{(3)})\!),\qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(2v^{(4)})\!)$$

beziehlich darstellenden Reihen. Führt man nun in (F_2) an Stelle der genannten $4p$-fach unendlichen Reihe das Product dieser vier Thetafunctionen ein, so erhält man die Riemann'sche Thetaformel in der Gestalt:

$$\text{(R)}\qquad 2^p\vartheta(\!(2u^{(1)})\!)\,\vartheta(\!(2u^{(2)})\!)\,\vartheta(\!(2u^{(3)})\!)\,\vartheta(\!(2u^{(4)})\!)$$

$$=\sum_{\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right]}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(2v^{(1)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(2v^{(2)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(2v^{(3)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(2v^{(4)})\!),$$

wobei die Summation auf der rechten Seite über alle Terme zu erstrecken ist, die aus dem allgemeinen Gliede hervorgehen, wenn man an Stelle des Systems der $2p$ Buchstaben $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p;\ \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_p$ der Reihe nach die sämmtlichen 2^{2p} Variationen der Elemente 0, 1 zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung oder, was dasselbe, an Stelle von $\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}$ der Reihe nach die sämmtlichen 2^{2p} Normalcharakteristiken treten lässt. Da die Grössen u und v nur den Gleichungen:

$$2u_\mu^{(1)} = v_\mu^{(1)} + v_\mu^{(2)} + v_\mu^{(3)} + v_\mu^{(4)},$$

$$2u_\mu^{(2)} = v_\mu^{(1)} + v_\mu^{(2)} - v_\mu^{(3)} - v_\mu^{(4)},$$

$$2u_\mu^{(3)} = v_\mu^{(1)} - v_\mu^{(2)} + v_\mu^{(3)} - v_\mu^{(4)},$$

$$2u_\mu^{(4)} = v_\mu^{(1)} - v_\mu^{(2)} - v_\mu^{(3)} + v_\mu^{(4)},$$

zu genügen haben, im Übrigen aber vollständig willkührlich gewählt

werden dürfen, so kann man in der gewonnenen Formel (R) die Grössen v als unabhängige Veränderliche betrachten, und es vertreten dann die Grössen u die durch die soeben aufgestellten Gleichungen definirten linearen Functionen derselben.

3.

Die gewonnene Formel (R) ist einer bedeutenden Verallgemeinerung fähig. Um zu derselben zu gelangen, lasse man, unter Benutzung der Elemente einer willkührlichen Charakteristik $\begin{bmatrix}\eta\\ \eta'\end{bmatrix}$, auf der rechten Seite dieser Formel das System:

$$(2v^{(1)}) \quad \text{übergehen in} \quad \left(2v^{(1)} + \begin{vmatrix}2\eta\\ 2\eta'\end{vmatrix}\right),$$

es gehen dann gleichzeitig die auf der linken Seite stehenden Systeme:

$$(2u^{(1)}), \qquad (2u^{(2)}), \qquad (2u^{(3)}), \qquad (2u^{(4)})$$

beziehlich über in:

$$\left(2u^{(1)} + \begin{vmatrix}\eta\\ \eta'\end{vmatrix}\right), \quad \left(2u^{(2)} + \begin{vmatrix}\eta\\ \eta'\end{vmatrix}\right), \quad \left(2u^{(3)} + \begin{vmatrix}\eta\\ \eta'\end{vmatrix}\right), \quad \left(2u^{(4)} + \begin{vmatrix}\eta\\ \eta'\end{vmatrix}\right),$$

und man erhält, wenn man auf die rechte Seite der so entstandenen Gleichung die Formel (D), auf die linke die Formel (A) des Art. 1 anwendet, auch die den beiden Seiten gemeinsamen Exponentialfactoren durch Division entfernt, die allgemeinere Formel:

$$\text{(R}'\text{)} \qquad 2^p\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta\\ \eta'\end{bmatrix}(\!(2u^{(1)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta\\ \eta'\end{bmatrix}(\!(2u^{(2)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta\\ \eta'\end{bmatrix}(\!(2u^{(3)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta\\ \eta'\end{bmatrix}(\!(2u^{(4)})\!)$$

$$= \sum_{\varepsilon,\,\varepsilon'} (-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu \eta'_\mu - \varepsilon'_\mu \eta_\mu)}\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(2v^{(1)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(2v^{(2)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(2v^{(3)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(2v^{(4)})\!).$$

Lässt man jetzt weiter, unter Benutzung der Elemente zweier willkührlicher Charakteristiken $\begin{bmatrix}\rho\\ \rho'\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\sigma\\ \sigma'\end{bmatrix}$, auf der rechten Seite dieser letzten Formel die Systeme:

$$(2v^{(2)}), \qquad (2v^{(3)}), \qquad (2v^{(4)})$$

beziehlich übergehen in:

$$\left(2v^{(2)} + \begin{vmatrix}\rho\\ \rho'\end{vmatrix}\right), \qquad \left(2v^{(3)} + \begin{vmatrix}\sigma\\ \sigma'\end{vmatrix}\right), \qquad \left(2v^{(4)} - \begin{vmatrix}\rho + \sigma\\ \rho' + \sigma'\end{vmatrix}\right),$$

so gehen dadurch die auf der linken Seite stehenden Systeme:

$$(2u^{(2)}), \qquad (2u^{(3)}), \qquad (2u^{(4)})$$

beziehlich über in:

$$\left(2u^{(2)} + \begin{vmatrix}\rho\\ \rho'\end{vmatrix}\right), \qquad \left(2u^{(3)} + \begin{vmatrix}\sigma\\ \sigma'\end{vmatrix}\right), \qquad \left(2u^{(4)} - \begin{vmatrix}\rho + \sigma\\ \rho' + \sigma'\end{vmatrix}\right),$$

während das System $(2u^{(1)})$ ungeändert bleibt, und man erhält, wenn man auf die rechte wie linke Seite der so entstandenen Gleichung die Formel (A) des Art. I anwendet, auch die den beiden Seiten gemeinsamen Exponentialfactoren durch Division entfernt, schliesslich die Formel:

$$(\mathrm{R}'') \qquad 2^p\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta\\ \eta'\end{bmatrix}((2u^{(1)}))\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta+\rho\\ \eta'+\rho'\end{bmatrix}((2u^{(2)}))\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta+\sigma\\ \eta'+\sigma'\end{bmatrix}((2u^{(3)}))\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta-\rho-\sigma\\ \eta'-\rho'-\sigma'\end{bmatrix}((2u^{(4)}))$$

$$= \sum_{\varepsilon} (-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\eta'_\mu - \varepsilon'_\mu\eta_\mu)}\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((2v^{(1)}))\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon+\rho\\ \varepsilon'+\rho'\end{bmatrix}((2v^{(2)}))\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon+\sigma\\ \varepsilon'+\sigma'\end{bmatrix}((2v^{(3)}))\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon-\rho-\sigma\\ \varepsilon'-\rho'-\sigma'\end{bmatrix}((2v^{(4)})).$$

Diese Formel umfasst die Formeln (R), (R′) als specielle Fälle und ist zugleich die allgemeinste derartige Formel.

Setzt man in der Formel (R″):

$$\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((2v^{(1)}))\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon+\rho\\ \varepsilon'+\rho'\end{bmatrix}((2v^{(2)}))\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon+\sigma\\ \varepsilon'+\sigma'\end{bmatrix}((2v^{(3)}))\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon-\rho-\sigma\\ \varepsilon'-\rho'-\sigma'\end{bmatrix}((2v^{(4)})) = x_{\varepsilon},$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}\eta\\ \eta'\end{bmatrix}((2u^{(1)}))\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta+\rho\\ \eta'+\rho'\end{bmatrix}((2u^{(2)}))\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta+\sigma\\ \eta'+\sigma'\end{bmatrix}((2u^{(3)}))\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta-\rho-\sigma\\ \eta'-\rho'-\sigma'\end{bmatrix}((2u^{(4)})) = x'_{\eta},$$

und bezeichnet zur Abkürzung $(-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu \eta'_\mu - \varepsilon'_\mu \eta_\mu)}$ mit $(-1)^{|\varepsilon|\eta|}$, so nimmt dieselbe die Gestalt an:

$$2^p x'_{\eta} = \sum_{[\varepsilon]} (-1)^{|\varepsilon|\eta|} x_{\varepsilon} .$$

Lässt man jetzt hierin an Stelle von $[\eta]$ der Reihe nach die sämmtlichen 2^{2p} Normalcharakteristiken treten, so erhält man ein System von 2^{2p} linearen Gleichungen, welches bei passend gewählter Reihenfolge der Charakteristiken eine ungemein übersichtliche Gestalt annimmt, und welches für die Untersuchung der zwischen den verschiedenen Thetafunctionen bestehenden Beziehungen insofern von fundamentaler Bedeutung ist, als es in gewissen aus ihm ableitbaren Gleichungen die Grundtypen für die Additionstheoreme der Thetafunctionen und für die damit zusammenhängenden Thetarelationen liefert. Der eingehenden Untersuchung dieses Gleichungensystems ist der fünfte Abschnitt meiner in der Einleitung erwähnten Arbeit gewidmet, auf den ich bezüglich des Näheren mir zu verweisen erlaube.

Würzburg, im Juli 1882.

ABLEITUNG
EINER ALLGEMEINEN THETAFORMEL

VON

F. PRYM
in WÜRZBURG.

Die in der vorhergehenden Arbeit zur Ableitung der Riemann'schen Thetaformel angewandte Methode soll jetzt dazu benutzt werden, eine Thetaformel von allgemeinerem Charakter herzustellen. Man gelangt zu derselben, indem man von einem Producte von n Thetareihen ausgeht und zur Transformation der Variablen und der Summationsbuchstaben eine allgemeine mit rationalen Zahlen als Coefficienten versehene orthogonale Substitution verwendet. Die Anwendung einer derartigen Substitution erweist sich als nothwendig, sobald man die Bedingung stellt, dass durch die Transformation Thetareihen entstehen, welche dieselben Modulen besitzen, wie die ursprünglichen. Ein specieller Fall der so entstehenden Formel, welcher dadurch charakterisirt ist, dass die n^2 Coefficienten e der orthogonalen Substitution der Bedingung $e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}$ für jedes μ und ν von 1 bis n genügen, ist von mir schon früher, im zweiten Abschnitte meiner auf Seite 201 citirten Arbeit, mit Hülfe functionentheoretischer Betrachtungen abgeleitet worden, und es musste bei dem dort angewandten Verfahren die Bedingung $e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}$ gestellt werden, um eine directe Bestimmung der Constanten zu ermöglichen. Die nachfolgende Untersuchung zeigt, dass diese Bedingung eine unnöthige Beschränkung war, insofern als die jetzt entstehende, von dieser Bedingung freie Formel (Formel (θ) des Art. 2), sobald man nur allgemein die Grössen $e_{\mu\nu}$ und $e_{\nu\mu}$, die durch

r getheilt die Substitutionscoefficienten $e_{\mu\nu}$ beziehlich $e_{\nu\mu}$ repräsentiren, als identisch betrachtet, ohne Weiteres mit der früheren übereinstimmt. Nachdem so die allgemeinste Formel gewonnen ist, handelt es sich nur noch darum, aus ihr durch passende Verfügung über die Coefficienten e der orthogonalen Substitution solche specielle Formeln zu gewinnen, die von praktischer Bedeutung für die Theorie der allgemeinen Thetafunctionen sind. Untersuchungen dieser Art bilden den Gegenstand der dieser Arbeit unmittelbar folgenden Abhandlung. Die Ausdehnung der hier angewandten Methode auf die Herstellung von Relationen zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Modulen wird einer späteren Arbeit vorbehalten.

1.

Aus der in der vorhergehenden Arbeit zu Grunde gelegten p-fach unendlichen Thetareihe:

$$\vartheta(w_1 \mid \dots \mid w_p) = \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \dots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}m_\mu m_{\mu'} + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} m_\mu w_\mu},$$

$$a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu},$$

kann unter Benutzung von $2p$ willkürlichen Constanten $g_1, \dots, g_p$, $h_1, \dots, h_p$ die allgemeinere Reihe:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(w_1 \mid \dots \mid w_p)$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \dots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}(m_\mu + g_\mu)(m_{\mu'} + g_{\mu'}) + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(m_\mu + g_\mu)(w_\mu + h_\mu \pi i)}$$

gebildet werden. Die dadurch definirte neue Function $\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(w_1 \mid \dots \mid w_p)$ ist dann mit der ursprünglichen verknüpft durch die Gleichung:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 & \dots & g_p \\ h_1 & \dots & h_p \end{bmatrix}(w_1 \mid \dots \mid w_p) = \vartheta(w_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu a_{1\mu} + h_1 \pi i \mid \dots \mid w_p + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu a_{p\mu} + h_p \pi i)$$
$$\times e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} g_\mu g_{\mu'} + 2 \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu (w_\mu + h_\mu \pi i)}$$

und geht, wenn die Grössen g, h sämmtlich den Werth Null annehmen, in dieselbe über, d. h. es ist:

$$\vartheta\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}(w_1 \mid \dots \mid w_p) = \vartheta(w_1 \mid \dots \mid w_p).$$

Ähnlich wie die ursprüngliche Function genügt die allgemeinere den Gleichungen:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 & \dots & g_p \\ h_1 & \dots & h_p \end{bmatrix}(w_1 \mid \dots \mid w_\nu + \pi i \mid \dots \mid w_p) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 & \dots & g_p \\ h_1 & \dots & h_p \end{bmatrix}(w_1 \mid \dots \mid w_\nu \mid \dots \mid w_p) e^{2 g_\nu \pi i},$$
$$(\nu = 1, 2, \dots, p)$$
$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 & \dots & g_p \\ h_1 & \dots & h_p \end{bmatrix}(w_1 + a_{1\nu} \mid \dots \mid w_p + a_{p\nu}) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 & \dots & g_p \\ h_1 & \dots & h_p \end{bmatrix}(w_1 \mid \dots \mid w_p) e^{-2w_\nu - a_{\nu\nu} - 2h_\nu \pi i},$$

welche sie zugleich bis auf einen von den Variablen $w_1, \dots, w_p$ freien Factor bestimmen.

Das Symbol $\begin{bmatrix} g_1 & \dots & g_p \\ h_1 & \dots & h_p \end{bmatrix}$ wird die Charakteristik der Thetafunction genannt und soll, wenn dadurch kein Missverständniss zu befürchten, abgekürzt durch $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ bezeichnet werden. Dabei ist nicht zu übersehen, dass die hier gewählte und im Folgenden ausschliesslich zur Verwendung kommende Bezeichnungsweise von der in der vorhergehenden Arbeit angewandten verschieden ist, und dass entsprechend auch der Begriff der zu einer Thetafunction gehörigen Charakteristik sich geändert hat. Will man nämlich aus $\vartheta\begin{bmatrix} g_1 & \dots & g_p \\ h_1 & \dots & h_p \end{bmatrix}(w_1 \mid \dots \mid w_p)$ die in der vorhergehenden Arbeit mit $\vartheta\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 & \dots & \varepsilon'_p \end{bmatrix}(w_1 \mid \dots \mid w_p)$ bezeichnete Function erhalten, so hat man $g_1 = \frac{\varepsilon_1}{2}, \dots, g_p = \frac{\varepsilon_p}{2}$, $h_1 = \frac{\varepsilon'_1}{2}, \dots, h_p = \frac{\varepsilon'_p}{2}$ zu setzen. Man gelangt also in dem Falle, wo die Grössen g, h sämmtlich rationale Zahlen mit dem gemeinsamen Nenner 2 sind, von der hier angewandten Bezeichnungs-

weise zu der in der vorhergehenden Arbeit benutzten, indem man in der Charakteristik bei jedem Elemente den Nenner 2 unterdrückt. Eine ähnliche Vereinfachung wird man sich bei allen jenen Untersuchungen, bei denen die Elemente der auftretenden Charakteristiken sämmtlich rationale Zahlen mit einem gemeinsamen Nenner r sind, gestatten dürfen, in der Weise, dass man alsdann bei allen Charakteristikenelementen den Nenner r unterdrückt und das auf diese Weise entstehende, nur ganze Zahlen als Elemente enthaltende Symbol in neuer Definition wieder mit dem Namen Charakteristik belegt.

Ebenso wie in der vorhergehenden Arbeit soll auch hier, wenn die Ausdrücke für die Argumente einer Thetafunction sich nur durch untere Indices unterscheiden, hinter dem Functionszeichen nur der allgemeine Ausdruck für die Argumente, mit Weglassung des Index, in doppelte Klammern eingeschlossen geschrieben werden, also $\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((w))$ statt $\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(w_1|\dots|w_p)$, und entsprechend soll ein Grössensystem $w_1|\dots|w_p$ einfacher durch (w) bezeichnet werden. Bezeichnet man endlich noch das System:

$$w_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g'_\mu a_{1\mu} + h'_1\pi i \,|\, \dots \,|\, w_p + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g'_\mu a_{p\mu} + h'_p\pi i,$$

wobei die g', h' beliebige Constanten bezeichnen, symbolisch mit $\left(w + \begin{vmatrix}g'\\h'\end{vmatrix}\right)$, so ergeben sich durch Betrachtung der die Function $\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((w))$ definirenden Reihe leicht die im Späteren zur Anwendung kommenden Relationen:

$$\text{(A)}\quad \vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}\left(\left(w + \begin{vmatrix}g'\\h'\end{vmatrix}\right)\right) = \vartheta\begin{bmatrix}g+g'\\h+h'\end{bmatrix}((w))\,e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}g'_\mu g'_{\mu'} - 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g'_\mu(w_\mu + h_\mu\pi i + h'_\mu\pi i)},$$

$$\text{(B}_1\text{)}\quad \vartheta\begin{bmatrix}g_1 \dots g_\nu + 1 \dots g_p\\h_1 \dots h_\nu \dots h_p\end{bmatrix}((w)) = \vartheta\begin{bmatrix}g_1 \dots g_\nu \dots g_p\\h_1 \dots h_\nu \dots h_p\end{bmatrix}((w)),$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, p)$$

$$\text{(B}_2\text{)}\quad \vartheta\begin{bmatrix}g_1 \dots g_\nu \dots g_p\\h_1 \dots h_\nu + 1 \dots h_p\end{bmatrix}((w)) = \vartheta\begin{bmatrix}g_1 \dots g_\nu \dots g_p\\h_1 \dots h_\nu \dots h_p\end{bmatrix}((w))e^{2g_\nu\pi i},$$

$$\text{(C)}\quad \vartheta\begin{bmatrix}g_1 \dots g_p\\h_1 \dots h_p\end{bmatrix}((-w)) = \vartheta\begin{bmatrix}-g_1 \dots -g_p\\-h_1 \dots -h_p\end{bmatrix}((w)),$$

die für beliebige g, h, g', h' gelten. Sind dagegen die Grössen g', h' ganze Zahlen, so geht aus der Formel (A) durch Anwendung der Relationen (B) die folgende einfachere Formel hervor:

$$\text{(D)}\quad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left(\!\!\left(w + \begin{vmatrix} g' \\ h' \end{vmatrix} \right)\!\!\right) = \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(w)\!)\, e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} g'_\mu g'_{\mu'} - 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g'_\mu w_\mu + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(g_\mu h'_\mu - g'_\mu h_\mu)\pi i}.$$

2.

Unter $u_1^{(1)}, \ldots, u_p^{(1)};\; u_1^{(2)}, \ldots, u_p^{(2)};\; \ldots;\; u_1^{(n)}, \ldots\, u_p^{(n)}$ sollen n Systeme von je p beliebigen Grössen verstanden werden. Bildet man dann, indem man unter r eine noch unbestimmte positive ganze Zahl versteht, das Product der n in der Form:

$$\vartheta(\!(ru^{(\nu)})\!) = \sum_{m_1^{(\nu)}=-\infty}^{m_1^{(\nu)}=+\infty} \cdots \sum_{m_p^{(\nu)}=-\infty}^{m_p^{(\nu)}=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} m_\mu^{(\nu)} m_{\mu'}^{(\nu)} + 2r\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} m_\mu^{(\nu)} u_\mu^{(\nu)}}$$

enthaltenen, den Werthen $\nu = 1, 2, \ldots, n$ entsprechenden Functionen $\vartheta(\!(ru^{(1)})\!)$, $\vartheta(\!(ru^{(2)})\!)$, $\ldots$, $\vartheta(\!(ru^{(n)})\!)$, so erhält man zunächst:

$$\text{(F)}\qquad \vartheta(\!(ru^{(1)})\!)\,\vartheta(\!(ru^{(2)})\!) \ldots \vartheta(\!(ru^{(n)})\!)$$

$$= \sum_{m}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left(m_\mu^{(1)} m_{\mu'}^{(1)} + \ldots + m_\mu^{(n)} m_{\mu'}^{(n)}\right) + 2r\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(m_\mu^{(1)} u_\mu^{(1)} + \ldots + m_\mu^{(n)} u_\mu^{(n)}\right)},$$

wobei die Summation auf der rechten Seite in der Weise auszuführen ist, dass jede der np Grössen m unabhängig von den anderen die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft. In die rechte Seite der Formel (F) sollen jetzt an Stelle der Grössen m und u neue Grössen eingeführt werden.

Es mögen $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}; c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2n}; \ldots; c_{n1}, c_{n2}, \ldots, c_{nn}$ n^2 ganze Zahlen bezeichnen, die für jedes μ und μ' von 1 bis n den Bedingungen:

$$c_{1\mu}c_{1\mu'} + c_{2\mu}c_{2\mu'} + \ldots + c_{n\mu}c_{n\mu'} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu, \\ r^2, \text{ wenn } \mu' = \mu, \end{cases}$$

genügen, wobei die Grösse r, mit der das vorher eingeführte r jetzt zu identificiren ist, eine positive ganze Zahl sein soll. Es bilden dann die Grössen $\frac{c_{11}}{r}, \frac{c_{12}}{r}, \ldots, \frac{c_{1n}}{r}; \frac{c_{21}}{r}, \frac{c_{22}}{r}, \ldots, \frac{c_{2n}}{r}; \ldots; \frac{c_{n1}}{r}, \frac{c_{n2}}{r}, \ldots, \frac{c_{nn}}{r}$ die Coefficienten einer orthogonalen Substitution, und es ist daher, wenn man unter $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ beliebige Grössen versteht und

$$(\mathrm{O}) \qquad \begin{aligned} c_{11}x^{(1)} + c_{12}x^{(2)} + \ldots + c_{1n}x^{(n)} &= ry^{(1)}, \\ c_{21}x^{(1)} + c_{22}x^{(2)} + \ldots + c_{2n}x^{(n)} &= ry^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots \\ c_{n1}x^{(1)} + c_{n2}x^{(2)} + \ldots + c_{nn}x^{(n)} &= ry^{(n)}, \end{aligned}$$

setzt, das so gebildete Gleichungensystem ein orthogonales, oder, was dasselbe sagt, es ist stets:

$$x^{(1)^2} + x^{(2)^2} + \ldots + x^{(n)^2} = y^{(1)^2} + y^{(2)^2} + \ldots + y^{(n)^2};$$

auch finden weiter noch die mit den obigen äquivalenten Relationen:

$$c_{\mu 1}c_{\mu' 1} + c_{\mu 2}c_{\mu' 2} + \ldots + c_{\mu n}c_{\mu' n} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu, \\ r^2, \text{ wenn } \mu' = \mu, \end{cases}$$

statt.

In die rechte Seite der Formel (F) führe man jetzt an Stelle von m_μ, u_μ allgemein, d. h. für $\mu = 1, 2, \ldots, p$, neue Grössen n_μ, v_μ ein, welche mit ihnen verknüpft sind durch die Gleichungen:

$$
(\mathrm{S})\qquad
\begin{array}{ll}
c_{11}m_\mu^{(1)} + c_{12}m_\mu^{(2)} + \dots + c_{1n}m_\mu^{(n)} = rn_\mu^{(1)}, & c_{11}u_\mu^{(1)} + c_{12}u_\mu^{(2)} + \dots + c_{1n}u_\mu^{(n)} = rv_\mu^{(1)}, \\
c_{21}m_\mu^{(1)} + c_{22}m_\mu^{(2)} + \dots + c_{2n}m_\mu^{(n)} = rn_\mu^{(2)}, & c_{21}u_\mu^{(1)} + c_{22}u_\mu^{(2)} + \dots + c_{2n}u_\mu^{(n)} = rv_\mu^{(2)}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
c_{n1}m_\mu^{(1)} + c_{n2}m_\mu^{(2)} + \dots + c_{nn}m_\mu^{(n)} = rn_\mu^{(n)}, & c_{n1}u_\mu^{(1)} + c_{n2}u_\mu^{(2)} + \dots + c_{nn}u_\mu^{(n)} = rv_\mu^{(n)},
\end{array}
$$

oder auch durch die damit äquivalenten Gleichungen:

$$
(\mathrm{S}')\qquad
\begin{array}{ll}
c_{11}n_\mu^{(1)} + c_{21}n_\mu^{(2)} + \dots + c_{n1}n_\mu^{(n)} = rm_\mu^{(1)}, & c_{11}v_\mu^{(1)} + c_{21}v_\mu^{(2)} + \dots + c_{n1}v_\mu^{(n)} = ru_\mu^{(1)}, \\
c_{12}n_\mu^{(1)} + c_{22}n_\mu^{(2)} + \dots + c_{n2}n_\mu^{(n)} = rm_\mu^{(2)}, & c_{12}v_\mu^{(1)} + c_{22}v_\mu^{(2)} + \dots + c_{n2}v_\mu^{(n)} = ru_\mu^{(2)}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
c_{1n}n_\mu^{(1)} + c_{2n}n_\mu^{(2)} + \dots + c_{nn}n_\mu^{(n)} = rm_\mu^{(n)}, & c_{1n}v_\mu^{(1)} + c_{2n}v_\mu^{(2)} + \dots + c_{nn}v_\mu^{(n)} = ru_\mu^{(n)}.
\end{array}
$$

In Folge dieser zwischen den Grössen m und n wie zwischen den Grössen u und v gesetzten Beziehungen wird das Gleichungensystem (O) erfüllt, wenn man allgemein, d. h. für $\nu = 1, 2, \dots, n$:

1) $x^{(\nu)}$ durch $m_\mu^{(\nu)}$ und gleichzeitig $y^{(\nu)}$ durch $n_\mu^{(\nu)}$,

2) $x^{(\nu)}$ durch $m_{\mu'}^{(\nu)}$ und gleichzeitig $y^{(\nu)}$ durch $n_{\mu'}^{(\nu)}$,

3) $x^{(\nu)}$ durch $u_\mu^{(\nu)}$ und gleichzeitig $y^{(\nu)}$ durch $v_\mu^{(\nu)}$

ersetzt. Dasselbe System wird daher auch erfüllt, wenn man

4) $x^{(\nu)}$ durch $m_\mu^{(\nu)} + m_{\mu'}^{(\nu)}$ und gleichzeitig $y^{(\nu)}$ durch $n_\mu^{(\nu)} + n_{\mu'}^{(\nu)}$,

5) $x^{(\nu)}$ durch $m_\mu^{(\nu)} + u_\mu^{(\nu)}$ und gleichzeitig $y^{(\nu)}$ durch $n_\mu^{(\nu)} + v_\mu^{(\nu)}$

ersetzt. Es bestehen daher, entsprechend den fünf soeben aufgestellten Lösungen, die Relationen:

$$m_\mu^{(1)^2} + m_\mu^{(2)^2} + \ldots + m_\mu^{(n)^2} = n_\mu^{(1)^2} + n_\mu^{(2)^2} + \ldots + n_\mu^{(n)^2},$$

$$m_{\mu'}^{(1)^2} + m_{\mu'}^{(2)^2} + \ldots + m_{\mu'}^{(n)^2} = n_{\mu'}^{(1)^2} + n_{\mu'}^{(2)^2} + \ldots + n_{\mu'}^{(n)^2},$$

$$u_\mu^{(1)^2} + u_\mu^{(2)^2} + \ldots + u_\mu^{(n)^2} = v_\mu^{(1)^2} + v_\mu^{(2)^2} + \ldots + v_\mu^{(n)^2},$$

$$(m_\mu^{(1)} + m_{\mu'}^{(1)})^2 + \ldots + (m_\mu^{(n)} + m_{\mu'}^{(n)})^2 = (n_\mu^{(1)} + n_{\mu'}^{(1)})^2 + \ldots + (n_\mu^{(n)} + n_{\mu'}^{(n)})^2,$$

$$(m_\mu^{(1)} + u_\mu^{(1)})^2 + \ldots + (m_\mu^{(n)} + u_\mu^{(n)})^2 = (n_\mu^{(1)} + v_\mu^{(1)})^2 + \ldots + (n_\mu^{(n)} + v_\mu^{(n)})^2,$$

aus denen durch passende Verbindung schliesslich die Gleichungen:

$$m_\mu^{(1)} m_{\mu'}^{(1)} + m_\mu^{(2)} m_{\mu'}^{(2)} + \ldots + m_\mu^{(n)} m_{\mu'}^{(n)} = n_\mu^{(1)} n_{\mu'}^{(1)} + n_\mu^{(2)} n_{\mu'}^{(2)} + \ldots + n_\mu^{(n)} n_{\mu'}^{(n)},$$

$$m_\mu^{(1)} u_\mu^{(1)} + m_\mu^{(2)} u_\mu^{(2)} + \ldots + m_\mu^{(n)} u_\mu^{(n)} = n_\mu^{(1)} v_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} v_\mu^{(2)} + \ldots + n_\mu^{(n)} v_\mu^{(n)}$$

hervorgehen, die für jedes μ und μ' von 1 bis p gelten. Mit Hülfe dieser beiden Gleichungen kann man nun auf der rechten Seite der Formel (F) die Grössen m und u durch die Grössen n und v ersetzen und erhält dann die neue Formel:

$$(\mathrm{F}_1) \qquad \vartheta(\!(ru^{(1)})\!)\,\vartheta(\!(ru^{(2)})\!) \ldots \vartheta(\!(ru^{(n)})\!)$$

$$= \sum_n e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left(n_\mu^{(1)} n_{\mu'}^{(1)} + \ldots + n_\mu^{(n)} n_{\mu'}^{(n)}\right) + 2r \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(n_\mu^{(1)} v_\mu^{(1)} + \ldots + n_\mu^{(n)} v_\mu^{(n)}\right)},$$

wobei jedoch die Art und Weise, wie über die Grössen n zu summiren ist, noch einer näheren Bestimmung bedarf.

Bei der Ausführung der auf der rechten Seite der Formel (F) angedeuteten Summation tritt im allgemeinen Gliede an Stelle des Systems der n einem beliebigen Index μ entsprechenden Grössen:

$$m_\mu^{(1)},\ m_\mu^{(2)},\ \ldots,\ m_\mu^{(n)}$$

jede Variation zur n^{ten} Classe mit Wiederholung, die man aus den überhaupt existirenden negativen und positiven ganzen Zahlen als Elementen bilden kann, und entsprechend muss daher bei der Ausführung der auf

der rechten Seite der Formel (F_1) angedeuteten Summation — da das allgemeine Glied dieser Summe aus dem allgemeinen Gliede der auf der rechten Seite von (F) stehenden Summe durch Einführung der Grössen n, v unmittelbar erhalten wurde — an Stelle des Systems der n Grössen:

$$n_\mu^{(1)}, \quad n_\mu^{(2)}, \quad \ldots, \quad n_\mu^{(n)}$$

jedes System von Werthen und jedes nur einmal gesetzt werden, welches sich aus den Gleichungen (S) ergibt, wenn man darin an Stelle des Systems der Grössen m die genannten Variationen treten lässt.

Denkt man sich nun für jedes μ von 1 bis p das System der n Zahlen $m_\mu^{(1)}, m_\mu^{(2)}, \ldots, m_\mu^{(n)}$ in die Form gebracht:

$$m_\mu^{(1)} = rm_\mu'^{(1)} + \rho_\mu^{(1)}, \quad m_\mu^{(2)} = rm_\mu'^{(2)} + \rho_\mu^{(2)}, \quad \ldots, \quad m_\mu^{(n)} = rm_\mu'^{(n)} + \rho_\mu^{(n)},$$

indem man allgemein unter $\rho_\mu^{(\nu)}$ den kleinsten positiven Rest der Zahl $m_\mu^{(\nu)}$ nach dem Modul r versteht, und führt diese Ausdrücke an Stelle der m in die Gleichungen des Systems (S) ein, so ergibt sich zunächst, wenn man noch unter $\bar{\alpha}_\mu^{(1)}, \bar{\alpha}_\mu^{(2)}, \ldots, \bar{\alpha}_\mu^{(n)}$ Grössen versteht, welche sich aus n gegebenen Grössen $\alpha_\mu^{(1)}, \alpha_\mu^{(2)}, \ldots, \alpha_\mu^{(n)}$ den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}_\mu^{(1)} &= c_{11}\alpha_\mu^{(1)} + c_{12}\alpha_\mu^{(2)} + \ldots + c_{1n}\alpha_\mu^{(n)}, \\
\bar{\alpha}_\mu^{(2)} &= c_{21}\alpha_\mu^{(1)} + c_{22}\alpha_\mu^{(2)} + \ldots + c_{2n}\alpha_\mu^{(n)}, \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\bar{\alpha}_\mu^{(n)} &= c_{n1}\alpha_\mu^{(1)} + c_{n2}\alpha_\mu^{(2)} + \ldots + c_{nn}\alpha_\mu^{(n)},
\end{aligned}$$

gemäss linear zusammensetzen, dass die n Grössen:

$$n_\mu^{(1)}, \quad n_\mu^{(2)}, \quad \ldots, \quad n_\mu^{(n)}$$

stets in der Form dargestellt werden können:

$$n_\mu^{(1)} = \hat{n}_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(1)}}{r}, \quad n_\mu^{(2)} = \hat{n}_\mu^{(2)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(2)}}{r}, \quad \ldots, \quad n_\mu^{(n)} = \hat{n}_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(n)}}{r},$$

wobei die $\hat{n}$ ganze Zahlen bedeuten, die in den linearen Formen $\bar{\alpha}$ vorkommenden α aber ausschliesslich Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, r-1$ bezeichnen, und dass *eine* solche Darstellung, wenn man zur Abkürzung:

$$\begin{gathered}
c_{11}m_\mu'^{(1)} + c_{12}m_\mu'^{(2)} + \ldots + c_{1n}m_\mu'^{(n)} = r_\mu^{(1)}, \\
c_{21}m_\mu'^{(1)} + c_{22}m_\mu'^{(2)} + \ldots + c_{2n}m_\mu'^{(n)} = r_\mu^{(2)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_{n1}m_\mu'^{(1)} + c_{n2}m_\mu'^{(2)} + \ldots + c_{nn}m_\mu'^{(n)} = r_\mu^{(n)},
\end{gathered}$$

setzt, durch die Gleichungen:

$$\begin{gathered}
\hat{n}_\mu^{(1)} = r_\mu^{(1)}, \quad \hat{n}_\mu^{(2)} = r_\mu^{(2)}, \quad \ldots, \quad \hat{n}_\mu^{(n)} = r_\mu^{(n)}, \\
\alpha_\mu^{(1)} = \rho_\mu^{(1)}, \quad \alpha_\mu^{(2)} = \rho_\mu^{(2)}, \quad \ldots, \quad \alpha_\mu^{(n)} = \rho_\mu^{(n)},
\end{gathered}$$

repräsentirt wird. Die weitere Frage ist dann, ob bei gegebenen m und dadurch bestimmten n die Grössen $\hat{n}$, α nicht auf mehrere den aufgestellten Bedingungen entsprechende Weisen bestimmt werden können.

Man nehme an, es existire eine zweite solche Bestimmung der Grössen $\hat{n}, \alpha$, und es sei dieselbe repräsentirt durch:

$$\begin{gathered}
\hat{n}_\mu^{(1)} = s_\mu^{(1)}, \quad \hat{n}_\mu^{(2)} = s_\mu^{(2)}, \quad \ldots, \quad \hat{n}_\mu^{(n)} = s_\mu^{(n)}, \\
\alpha_\mu^{(1)} = \sigma_\mu^{(1)}, \quad \alpha_\mu^{(2)} = \sigma_\mu^{(2)}, \quad \ldots, \quad \alpha_\mu^{(n)} = \sigma_\mu^{(n)},
\end{gathered}$$

wobei die s also wieder ganze Zahlen, die σ Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, r-1$ bezeichnen. Aus den beiden jetzt vorhandenen Darstellungen der Grössen n:

$$\begin{gathered}
n_\mu^{(1)} = r_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\rho}_\mu^{(1)}}{r}, \quad n_\mu^{(2)} = r_\mu^{(2)} + \frac{\bar{\rho}_\mu^{(2)}}{r}, \quad \ldots, \quad n_\mu^{(n)} = r_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\rho}_\mu^{(n)}}{r}, \\
n_\mu^{(1)} = s_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\sigma}_\mu^{(1)}}{r}, \quad n_\mu^{(2)} = s_\mu^{(2)} + \frac{\bar{\sigma}_\mu^{(2)}}{r}, \quad \ldots, \quad n_\mu^{(n)} = s_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\sigma}_\mu^{(n)}}{r},
\end{gathered}$$

wobei die $\bar{\rho}, \bar{\sigma}$ von den ρ, σ beziehlich in derselben Weise abhängen, wie die $\bar{\alpha}$ von den α, ergeben sich dann unmittelbar die Beziehungen:

$$\bar{\sigma}_\mu^{(1)} = \bar{\rho}_\mu^{(1)} - r(s_\mu^{(1)} - r_\mu^{(1)}),$$
$$\bar{\sigma}_\mu^{(2)} = \bar{\rho}_\mu^{(2)} - r(s_\mu^{(2)} - r_\mu^{(2)}),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\bar{\sigma}_\mu^{(n)} = \bar{\rho}_\mu^{(n)} - r(s_\mu^{(n)} - r_\mu^{(n)}),$$

und man erkennt daraus, indem man an Stelle der $\bar{\sigma}$ die ihnen entsprechenden linearen Functionen der σ setzt, dass die Grössen $\sigma_\mu^{(1)}, \sigma_\mu^{(2)}, \ldots, \sigma_\mu^{(n)}$ eine von der Lösung $\rho_\mu^{(1)}, \rho_\mu^{(2)}, \ldots, \rho_\mu^{(n)}$ verschiedene, d. h. derselben nach dem Modul r nicht congruente, Lösung des Congruenzensystems:

$$(\mathrm{C}) \quad \begin{cases} c_{11}x^{(1)} + c_{12}x^{(2)} + \ldots + c_{1n}x^{(n)} \equiv \bar{\rho}_\mu^{(1)} \pmod r, \\ c_{21}x^{(1)} + c_{22}x^{(2)} + \ldots + c_{2n}x^{(n)} \equiv \bar{\rho}_\mu^{(2)} \pmod r, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}x^{(1)} + c_{n2}x^{(2)} + \ldots + c_{nn}x^{(n)} \equiv \bar{\rho}_\mu^{(n)} \pmod r, \end{cases}$$

bilden müssen. Bezeichnet umgekehrt $\tau_\mu^{(1)}, \tau_\mu^{(2)}, \ldots, \tau_\mu^{(n)}$ eine beliebige von $\rho_\mu^{(1)}, \rho_\mu^{(2)}, \ldots, \rho_\mu^{(n)}$ verschiedene Lösung dieses Congruenzensystems, deren Elemente τ man sich auf ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul r reducirt zu denken hat, so kann man stets mit Hülfe der Grössen τ, indem man sie an Stelle der α treten lässt, eine von der ursprünglichen verschiedene Darstellung der Grössen u erhalten. Setzt man nämlich:

$$c_{11}\tau_\mu^{(1)} + c_{12}\tau_\mu^{(2)} + \ldots + c_{1n}\tau_\mu^{(n)} = \bar{\rho}_\mu^{(1)} + rf_\mu^{(1)},$$
$$c_{21}\tau_\mu^{(1)} + c_{22}\tau_\mu^{(2)} + \ldots + c_{2n}\tau_\mu^{(n)} = \bar{\rho}_\mu^{(2)} + rf_\mu^{(2)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_{n1}\tau_\mu^{(1)} + c_{n2}\tau_\mu^{(2)} + \ldots + c_{nn}\tau_\mu^{(n)} = \bar{\rho}_\mu^{(n)} + rf_\mu^{(n)},$$

oder in kürzerer Bezeichnung:

$$\bar{\tau}_\mu^{(1)} = \bar{\rho}_\mu^{(1)} + rf_\mu^{(1)}, \quad \bar{\tau}_\mu^{(2)} = \bar{\rho}_\mu^{(2)} + rf_\mu^{(2)}, \quad \ldots\ldots, \quad \bar{\tau}_\mu^{(n)} = \bar{\rho}_\mu^{(n)} + rf_\mu^{(n)},$$

so sind $f_\mu^{(1)}, f_\mu^{(2)}, \ldots, f_\mu^{(n)}$ ganze Zahlen, und es ergibt sich daher aus der ursprünglichen Darstellung:

$$n_\mu^{(1)} = r_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\rho}_\mu^{(1)}}{r}, \qquad n_\mu^{(2)} = r_\mu^{(2)} + \frac{\bar{\rho}_\mu^{(2)}}{r}, \qquad \ldots, \; n_\mu^{(n)} = r_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\rho}_\mu^{(n)}}{r},$$

mit Hülfe der letzten Gleichungen sofort die neue:

$$n_\mu^{(1)} = r_\mu^{(1)} - f_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\tau}_\mu^{(1)}}{r}, \; n_\mu^{(2)} = r_\mu^{(2)} - f_\mu^{(2)} + \frac{\bar{\tau}_\mu^{(2)}}{r}, \ldots, \; n_\mu^{(n)} = r_\mu^{(n)} - f_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\tau}_\mu^{(n)}}{r},$$

bei welcher also die Grössen $\hat{n}, \alpha$ die Werthe:

$$\hat{n}_\mu^{(1)} = r_\mu^{(1)} - f_\mu^{(1)}, \qquad \hat{n}_\mu^{(2)} = r_\mu^{(2)} - f_\mu^{(2)}, \qquad \ldots, \; \hat{n}_\mu^{(n)} = r_\mu^{(n)} - f_\mu^{(n)},$$

$$\alpha_\mu^{(1)} = \tau_\mu^{(1)}, \qquad \alpha_\mu^{(2)} = \tau_\mu^{(2)}, \qquad \ldots, \; \alpha_\mu^{(n)} = \tau_\mu^{(n)},$$

besitzen. Daraus folgt aber, dass die n zu gegebenen Grössen $m_\mu^{(1)}, m_\mu^{(2)}, \ldots, m_\mu^{(n)}$ gehörigen, durch die Gleichungen (S) in jedem Falle eindeutig bestimmten Grössen $n_\mu^{(1)}, n_\mu^{(2)}, \ldots, n_\mu^{(n)}$ auf s verschiedene Weisen in die Form:

$$n_\mu^{(1)} = \hat{n}_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(1)}}{r}, \qquad n_\mu^{(2)} = \hat{n}_\mu^{(2)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(2)}}{r}, \qquad \ldots, \; n_\mu^{(n)} = \hat{n}_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(n)}}{r}$$

— wobei die $\hat{n}$ ganze Zahlen, die in den linearen Formen $\bar{\alpha}$ vorkommenden α aber Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, r-1$ bezeichnen — gebracht werden können, wenn man unter s die Anzahl der ausschliesslich von Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, r-1$ als Elementen gebildeten oder, was auf dasselbe hinauskommt, der nach dem Modul r incongruenten Lösungen des Congruenzensystems (C) versteht. Diese Anzahl s ist aber dieselbe, wie die Anzahl der nach dem Modul r incongruenten Lösungen des Congruenzensystems:

$$(\mathrm{C}_0) \qquad \begin{aligned} c_{11}x^{(1)} + c_{12}x^{(2)} + \ldots + c_{1n}x^{(n)} &\equiv 0 \pmod{r}, \\ c_{21}x^{(1)} + c_{22}x^{(2)} + \ldots + c_{2n}x^{(n)} &\equiv 0 \pmod{r}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n1}x^{(1)} + c_{n2}x^{(2)} + \ldots + c_{nn}x^{(n)} &\equiv 0 \pmod{r}; \end{aligned}$$

man erhält nämlich die sämmtlichen soeben erwähnten Lösungen des Systems (C) und zwar jede nur einmal, wenn man zu einer beliebigen von ihnen, z. B. zu $\rho_\mu^{(1)}, \rho_\mu^{(2)}, \ldots, \rho_\mu^{(n)}$, der Reihe nach die sämmtlichen nach dem Modul r incongruenten Lösungen des Systems (C_0) addirt und die dabei auftretenden Zahlen stets auf ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul r reducirt.

Auf welche der s möglichen Weisen man nun auch die zu gegebenen Grössen $m_\mu^{(1)}, m_\mu^{(2)}, \ldots, m_\mu^{(n)}$ gehörigen, durch die Gleichungen (S) bestimmten Grössen $n_\mu^{(1)}, n_\mu^{(2)}, \ldots, n_\mu^{(n)}$ in die Form:

$$n_\mu^{(1)} = \hat{n}_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(1)}}{r}, \quad n_\mu^{(2)} = \hat{n}_\mu^{(2)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(2)}}{r}, \ldots, n_\mu^{(n)} = \hat{n}_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(n)}}{r}$$

bringen mag, es werden die bei irgend einer solchen Darstellung auftretenden ganzen Zahlen $\hat{n}_\mu^{(1)}, \hat{n}_\mu^{(2)}, \ldots, \hat{n}_\mu^{(n)}$ immer eine gewisse Bedingung erfüllen, die zudem vollständig unabhängig ist von dem speciellen Systeme der Grössen n, auf das sich die Darstellung bezieht. Führt man nämlich die soeben aufgestellten Ausdrücke an Stelle der Grössen n in die Gleichungen (S′) ein, indem man zugleich die $\bar{\alpha}$ durch die ihnen entsprechenden linearen Functionen der α ersetzt, so erhält man unter Berücksichtigung der Relationen, denen die ganzen Zahlen c genügen, die Gleichungen:

$$(S'') \quad \begin{aligned} &(c_{11}\hat{n}_\mu^{(1)} + c_{21}\hat{n}_\mu^{(2)} + \ldots + c_{n1}\hat{n}_\mu^{(n)}) + r\alpha_\mu^{(1)} = rm_\mu^{(1)}, \\ &(c_{12}\hat{n}_\mu^{(1)} + c_{22}\hat{n}_\mu^{(2)} + \ldots + c_{n2}\hat{n}_\mu^{(n)}) + r\alpha_\mu^{(2)} = rm_\mu^{(2)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(c_{1n}\hat{n}_\mu^{(1)} + c_{2n}\hat{n}_\mu^{(2)} + \ldots + c_{nn}\hat{n}_\mu^{(n)}) + r\alpha_\mu^{(n)} = rm_\mu^{(n)}, \end{aligned}$$

und erkennt daraus, dass für die n Grössen $\hat{n}_\mu^{(1)}, \hat{n}_\mu^{(2)}, \ldots, \hat{n}_\mu^{(n)}$ nur solche ganze Zahlen auftreten können, für welche die n Grössen:

$$c_{11}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n1}\hat{n}_\mu^{(n)}, \; c_{12}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n2}\hat{n}_\mu^{(n)}, \; \ldots, \; c_{1n}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{nn}\hat{n}_\mu^{(n)}$$

sämmtlich durch r theilbare ganze Zahlen sind. Setzt man umgekehrt

in den Gleichungen (S″) an Stelle der n Grössen $\hat{n}_\mu^{(1)}, \hat{n}_\mu^{(2)}, \ldots, \hat{n}_\mu^{(n)}$ irgend welche ganze Zahlen, für welche die n Grössen:

$$c_{11}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n1}\hat{n}_\mu^{(n)},\; c_{12}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n2}\hat{n}_\mu^{(n)},\; \ldots,\; c_{1n}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{nn}\hat{n}_\mu^{(n)}$$

sämmtlich durch r theilbare ganze Zahlen sind, und zugleich an Stelle der n Grössen $\alpha_\mu^{(1)}, \alpha_\mu^{(2)}, \ldots, \alpha_\mu^{(n)}$ irgend welche Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, r-1$, so liefern diese Gleichungen für die Grössen m immer ein System ganzer Zahlen $m_\mu^{(1)}, m_\mu^{(2)}, \ldots, m_\mu^{(n)}$, denen als Grössen n die aus den gewählten $\hat{n}$ und α gebildeten Grössen:

$$n_\mu^{(1)} = \hat{n}_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(1)}}{r}, \quad n_\mu^{(2)} = \hat{n}_\mu^{(2)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(2)}}{r}, \ldots, \quad n_\mu^{(n)} = \hat{n}_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(n)}}{r}$$

entsprechen. Daraus folgt aber unter Berücksichtigung des früher gefundenen Resultates, wonach bei gegebenen m und dadurch bestimmten n die Grössen $\hat{n}$ und α auf s verschiedene Weisen bestimmt werden können, dass an Stelle des Systems der n Grössen $m_\mu^{(1)}, m_\mu^{(2)}, \ldots, m_\mu^{(n)}$, die mit den Grössen $\hat{n}$ und α immer durch die Gleichungen (S″) verknüpft sind, jede Variation zur n^{ten} Classe mit Wiederholung, die man aus den überhaupt existirenden positiven und negativen ganzen Zahlen als Elementen bilden kann, und zwar eine jede s-mal tritt, wenn man an Stelle des Systems der n Grössen $\alpha_\mu^{(1)}, \alpha_\mu^{(2)}, \ldots, \alpha_\mu^{(n)}$ der Reihe nach die sämmtlichen r^n Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, r-1$ zur n^{ten} Classe mit Wiederholung setzt und dabei jedesmal an Stelle des Systems der n Grössen $\hat{n}_\mu^{(1)}, \hat{n}_\mu^{(2)}, \ldots, \hat{n}_\mu^{(n)}$ jedes System von n ganzen Zahlen treten lässt, für welches die n Grössen:

$$c_{11}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n1}\hat{n}_\mu^{(n)},\; c_{12}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n2}\hat{n}_\mu^{(n)},\; \ldots,\; c_{1n}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{nn}\hat{n}_\mu^{(n)}$$

sämmtlich durch r theilbare ganze Zahlen sind.

Aus dem zuletzt gewonnenen Resultate ergibt sich nun schliesslich, dass man die auf der rechten Seite der Gleichung (F_1) angedeutete Summation in der Weise ausführen kann, dass man im allgemeinen Gliede für jedes μ von 1 bis p:

$$n_\mu^{(1)} = \hat{n}_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(1)}}{r}, \quad n_\mu^{(2)} = \hat{n}_\mu^{(2)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(2)}}{r}, \ldots, \quad n_\mu^{(n)} = \hat{n}_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(n)}}{r}$$

setzt, hierauf an Stelle des Systems der n Grössen $\alpha_\mu^{(1)}, \alpha_\mu^{(2)}, \ldots, \alpha_\mu^{(n)}$ der Reihe nach die sämmtlichen r^n Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, r-1$ zur n^{ten} Classe mit Wiederholung treten lässt und zu jeder solchen Variation an Stelle des Systems der n Grössen $\mathring{n}_\mu^{(1)}, \mathring{n}_\mu^{(2)}, \ldots, \mathring{n}_\mu^{(n)}$ jedes System von n ganzen Zahlen setzt, für welches die n Grössen:

$$c_{11}\mathring{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n1}\mathring{n}_\mu^{(n)},\ c_{12}\mathring{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n2}\mathring{n}_\mu^{(n)},\ \ldots,\ c_{1n}\mathring{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{nn}\mathring{n}_\mu^{(n)}$$

sämmtlich durch r theilbare ganze Zahlen sind, endlich die Summe der so entstehenden Terme bildet und diese Summe noch durch s^p theilt.

Die in Bezug auf die Grössen $\mathring{n}$ auszuführende Summation kann von der ihr anhaftenden Beschränkung auf folgende Weise befreit werden. Berücksichtigt man, dass das System der n Grössen:

$$c_{11}\mathring{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n1}\mathring{n}_\mu^{(n)},\ c_{12}\mathring{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n2}\mathring{n}_\mu^{(n)},\ \ldots,\ c_{1n}\mathring{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{nn}\mathring{n}_\mu^{(n)}$$

zwar jedesmal in ein System ganzer Zahlen, aber nicht jedesmal in ein System durch r theilbarer ganzer Zahlen übergeht, wenn man an Stelle der Grössen $\mathring{n}$ beliebige ganze Zahlen setzt, berücksichtigt auch, dass ein jeder der aus den n Grössen:

$$n_\mu^{(1)} = \mathring{n}_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(1)}}{r},\qquad n_\mu^{(2)} = \mathring{n}_\mu^{(2)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(2)}}{r},\ \ldots,\ n_\mu^{(n)} = \mathring{n}_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(n)}}{r}$$

gebildeten analogen Ausdrücke:

$$c_{11}n_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n1}n_\mu^{(n)},\ c_{12}n_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n2}n_\mu^{(n)},\ \ldots,\ c_{1n}n_\mu^{(1)} + \ldots + c_{nn}n_\mu^{(n)}$$

mit dem ihm entsprechenden, die Grössen $\mathring{n}$ an Stelle der Grössen n enthaltenden Ausdrucke — da für jedes ν von 1 bis n:

$$c_{1\nu}n_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n\nu}n_\mu^{(n)} = c_{1\nu}\mathring{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n\nu}\mathring{n}_\mu^{(n)} + r\alpha_\mu^{(\nu)}$$

ist — immer gleichzeitig eine durch r theilbare oder eine durch r nicht

theilbare ganze Zahl ist, so erkennt man, dass man die Summation in Bezug auf die Grössen $\hat{n}$ von der ihr anhaftenden Beschränkung dadurch befreien kann, dass man das in (F_1) hinter dem Summenzeichen stehende allgemeine Glied mit einer Function F der sämmtlichen pn Grössen $n_\mu^{(1)},\ n_\mu^{(2)},\ \ldots,\ n_\mu^{(n)},\ \mu = 1, 2, \ldots, p$, multiplicirt, die so beschaffen ist, dass sie immer den Werth 0 besitzt, sobald auch nur eine der pn Grössen:

$$c_{11}n_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n1}n_\mu^{(n)},\ c_{12}n_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n2}n_\mu^{(n)},\ \ldots,\ c_{1n}n_\mu^{(1)} + \ldots + c_{nn}n_\mu^{(n)},$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

eine durch r nicht theilbare ganze Zahl ist, dass sie dagegen den Werth 1 hat, sobald diese pn Grössen sämmtlich durch r theilbare ganze Zahlen sind. Summirt man nämlich, nachdem man eine solche Function F hinter dem Summenzeichen als Factor eingeschoben hat, in Bezug auf jedes $\hat{n}$ von $-\infty$ bis $+\infty$, so wird der Werth der entstehenden Summe derselbe sein, wie der der ursprünglichen, da bei der neuen Summe alle diejenigen Glieder, für welche die pn Grössen:

$$c_{11}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n1}\hat{n}_\mu^{(n)},\ c_{12}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n2}\hat{n}_\mu^{(n)},\ \ldots,\ c_{1n}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{nn}\hat{n}_\mu^{(n)},$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

oder, was dasselbe, die pn Grössen:

$$c_{11}n_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n1}n_\mu^{(n)},\ c_{12}n_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n2}n_\mu^{(n)},\ \ldots,\ c_{1n}n_\mu^{(1)} + \ldots + c_{nn}n_\mu^{(n)},$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

nicht sämmtlich durch r theilbare ganze Zahlen sind, und welchen daher auch keine Glieder der ursprünglichen Summe entsprechen, in Folge des bei ihnen stattfindenden Verschwindens des Factors F den Werth Null besitzen, während der Complex der übrig bleibenden Glieder, da bei jedem derselben der Factor F den Werth 1 besitzt, mit dem Complex der die ursprüngliche Summe bildenden Glieder identisch ist. Eine Function F mit den erwähnten Eigenschaften soll jetzt gebildet werden.

Man setze, indem man unter μ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ versteht:

$$f_\mu =$$

$$\frac{1}{r^n}\left(\sum_{\beta_\mu^{(1)}=0}^{\beta_\mu^{(1)}=r-1} e^{\frac{2\beta_\mu^{(1)}\pi i}{r}\left(c_{11}n_\mu^{(1)}+\cdots+c_{n1}n_\mu^{(n)}\right)}\right)\cdots\left(\sum_{\beta_\mu^{(n)}=0}^{\beta_\mu^{(n)}=r-1} e^{\frac{2\beta_\mu^{(n)}\pi i}{r}\left(c_{1n}n_\mu^{(1)}+\cdots+c_{nn}n_\mu^{(n)}\right)}\right);$$

die so definirte Grösse f_μ besitzt dann immer den Werth 0, wenn auch nur eine der n Grössen:

$$c_{11}n_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n1}n_\mu^{(n)},\ c_{12}n_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n2}n_\mu^{(n)},\ \ldots\ldots,\ c_{1n}n_\mu^{(1)} + \ldots + c_{nn}n_\mu^{(n)}$$

eine durch r nicht theilbare ganze Zahl ist, dagegen den Werth 1, wenn diese n Grössen sämmtlich durch r theilbare ganze Zahlen sind. Bringt man nun, indem man zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}
c_{11}\beta_\mu^{(1)} + c_{12}\beta_\mu^{(2)} + \ldots + c_{1n}\beta_\mu^{(n)} &= \bar\beta_\mu^{(1)},\\
c_{21}\beta_\mu^{(1)} + c_{22}\beta_\mu^{(2)} + \ldots + c_{2n}\beta_\mu^{(n)} &= \bar\beta_\mu^{(2)},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
c_{n1}\beta_\mu^{(1)} + c_{n2}\beta_\mu^{(2)} + \ldots + c_{nn}\beta_\mu^{(n)} &= \bar\beta_\mu^{(n)},
\end{aligned}$$

setzt, die Grösse f_μ in die Form:

$$f_\mu = \frac{1}{r^n}\sum_{\beta_\mu^{(1)}=0}^{\beta_\mu^{(1)}=r-1}\cdots\sum_{\beta_\mu^{(n)}=0}^{\beta_\mu^{(n)}=r-1} e^{\frac{2\pi i}{r}\left(n_\mu^{(1)}\bar\beta_\mu^{(1)}+n_\mu^{(2)}\bar\beta_\mu^{(2)}+\cdots+n_\mu^{(n)}\bar\beta_\mu^{(n)}\right)}$$

und bildet das Product:

$$F = f_1 f_2 \ldots f_p = \frac{1}{r^{np}}\sum_{\beta}^{0,1,\ldots,r-1} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\left(n_\mu^{(1)}\bar\beta_\mu^{(1)}+n_\mu^{(2)}\bar\beta_\mu^{(2)}+\cdots+n_\mu^{(n)}\bar\beta_\mu^{(n)}\right)},$$

wobei die auf der rechten Seite angedeutete Summation so auszuführen

ist, dass jede der pn in den linearen Ausdrücken $\bar\beta$ vorkommenden Grössen β unabhängig von den anderen die Werthe $0, 1, \ldots, r-1$ annimmt, so ist F eine Function mit den gewünschten Eigenschaften, und man darf daher, wenn man sie auf der rechten Seite der Formel (F_1) hinter dem Summenzeichen als Factor eingeschoben und auch bei ihr für jedes μ von 1 bis p die Grössen:

$$n_\mu^{(1)}, \qquad n_\mu^{(2)}, \qquad \ldots, \; n_\mu^{(n)}$$

durch die Grössen:

$$\hat n_\mu^{(1)} + \frac{\bar\alpha_\mu^{(1)}}{r}, \quad \hat n_\mu^{(2)} + \frac{\bar\alpha_\mu^{(2)}}{r}, \; \ldots, \; \hat n_\mu^{(n)} + \frac{\bar\alpha_\mu^{(n)}}{r}$$

beziehlich ersetzt hat, die Summation alsdann in der Weise ausführen, dass die $\hat n$ unabhängig von einander die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, während gleichzeitig jede der pn in den linearen Ausdrücken $\bar\alpha$ vorkommenden Grössen α unabhängig von den anderen die Werthe $0, 1, \ldots, r-1$ annimmt. Man gelangt auf diese Weise nach einfacher Umformung des allgemeinen Gliedes der Summe und passender Anordnung der Summation, wenn man zugleich noch linke und rechte Seite mit $r^{np}s^p$ multiplicirt, zunächst zu der Gleichung:

$$(\mathrm{F}_2) \qquad (r^n s)^p\, \vartheta(\!(ru^{(1)})\!)\, \vartheta(\!(ru^{(2)})\!) \;\ldots\; \vartheta(\!(ru^{(n)})\!) =$$

$$\sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,r-1} \sum_{\hat n}^{-\infty,\ldots,+\infty} \left| \begin{array}{l} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left[\left(\hat n_\mu^{(1)} + \frac{\bar\alpha_\mu^{(1)}}{r}\right)\left(\hat n_{\mu'}^{(1)} + \frac{\bar\alpha_{\mu'}^{(1)}}{r}\right) + \ldots + \left(\hat n_\mu^{(n)} + \frac{\bar\alpha_\mu^{(n)}}{r}\right)\left(\hat n_{\mu'}^{(n)} + \frac{\bar\alpha_{\mu'}^{(n)}}{r}\right)\right]} \\ \times\, e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left[\left(\hat n_\mu^{(1)} + \frac{\bar\alpha_\mu^{(1)}}{r}\right)\left(rv_\mu^{(1)} + \frac{\bar\beta_\mu^{(1)}}{r}\pi i\right) + \ldots + \left(\hat n_\mu^{(n)} + \frac{\bar\alpha_\mu^{(n)}}{r}\right)\left(rv_\mu^{(n)} + \frac{\bar\beta_\mu^{(n)}}{r}\pi i\right)\right]} \end{array} \right|$$

wobei also die durch $\sum\limits_{\hat n}^{-\infty,\ldots,+\infty}$ markirte innere Summation so auszuführen ist, dass die pn Grössen $\hat n$ unabhängig von einander die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, die ebendaselbst vorkommende äussere Summation aber so, dass jede der $2pn$ in den linearen Ausdrücken $\bar\alpha$, $\bar\beta$ vorkommenden Grössen α, β unabhängig von den anderen die Werthe $0, 1, \ldots, r-1$ annimmt.

Die auf der rechten Seite der Formel (F_2) hinter dem ersten Summenzeichen stehende np-fach unendliche Reihe ist aber, wie ein Blick auf die in Art. 1 aufgestellte, die Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(w)\!)$ definirende Reihe zeigt, identisch mit dem Producte der n die Functionen:

$$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(1)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(1)}}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(1)})\!), \quad \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(2)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(2)}}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(2)})\!), \quad \ldots, \quad \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(n)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(n)}}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(n)})\!)$$

— bei denen die Charakteristiken, dem früher getroffenen Übereinkommen entsprechend, in abgekürzter Form geschrieben sind, sodass allgemein, d. h. für $\nu = 1, 2, \ldots, n$:

$$\text{das Symbol } \begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(\nu)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(\nu)}}{r} \end{bmatrix} \text{ die Charakteristik } \begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}_1^{(\nu)}}{r} & \cdots & \frac{\bar{\alpha}_p^{(\nu)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}_1^{(\nu)}}{r} & \cdots & \frac{\bar{\beta}_p^{(\nu)}}{r} \end{bmatrix}$$

vertritt — beziehlich darstellenden Reihen. Setzt man nun in (F_2) an Stelle der genannten np-fach unendlichen Reihe das Product dieser n Thetafunctionen ein, so erhält man schliesslich die folgende Hauptformel:

$$(\Theta) \qquad (r^n s)^p\, \vartheta(\!(ru^{(1)})\!)\, \vartheta(\!(ru^{(2)})\!) \ldots \vartheta(\!(ru^{(n)})\!)$$

$$= \sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,r-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(1)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(1)}}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(1)})\!)\, \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(2)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(2)}}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(2)})\!) \ldots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(n)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(n)}}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(n)})\!),$$

bei welcher die Summation in der Weise auszuführen ist, dass jede der $2np$ in den linearen Formen:

$$\begin{array}{ll}
\bar{\alpha}_\mu^{(1)} = c_{11}\alpha_\mu^{(1)} + c_{12}\alpha_\mu^{(2)} + \ldots + c_{1n}\alpha_\mu^{(n)}, & \bar{\beta}_\mu^{(1)} = c_{11}\beta_\mu^{(1)} + c_{12}\beta_\mu^{(2)} + \ldots + c_{1n}\beta_\mu^{(n)}, \\
\bar{\alpha}_\mu^{(2)} = c_{21}\alpha_\mu^{(1)} + c_{22}\alpha_\mu^{(2)} + \ldots + c_{2n}\alpha_\mu^{(n)}, & \bar{\beta}_\mu^{(2)} = c_{21}\beta_\mu^{(1)} + c_{22}\beta_\mu^{(2)} + \ldots + c_{2n}\beta_\mu^{(n)}, \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\bar{\alpha}_\mu^{(n)} = c_{n1}\alpha_\mu^{(1)} + c_{n2}\alpha_\mu^{(2)} + \ldots + c_{nn}\alpha_\mu^{(n)}, & \bar{\beta}_\mu^{(n)} = c_{n1}\beta_\mu^{(1)} + c_{n2}\beta_\mu^{(2)} + \ldots + c_{nn}\beta_\mu^{(n)},
\end{array}$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

vorkommenden Grössen α, β unabhängig von den anderen die Werthe $0, 1, \ldots, r-1$ annimmt. Da ferner die Grössen u und v nur den Gleichungen:

$$\begin{aligned} ru_\mu^{(1)} &= c_{11}v_\mu^{(1)} + c_{21}v_\mu^{(2)} + \ldots + c_{n1}v_\mu^{(n)}, \\ ru_\mu^{(2)} &= c_{12}v_\mu^{(1)} + c_{22}v_\mu^{(2)} + \ldots + c_{n2}v_\mu^{(n)}, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ru_\mu^{(n)} &= c_{1n}v_\mu^{(1)} + c_{2n}v_\mu^{(2)} + \ldots + c_{nn}v_\mu^{(n)}, \end{aligned}$$

zu genügen haben, im Übrigen aber vollständig willkürlich gewählt werden dürfen, so kann man in der gewonnenen Formel (θ) die Grössen v als unabhängige Veränderliche betrachten, und es vertreten dann die Grössen u die durch die soeben aufgestellten Gleichungen definirten linearen Functionen derselben. Der Werth von s endlich hängt, da s die Anzahl der nach dem Modul r incongruenten Lösungen des früher aufgestellten Congruenzensystems (C_0) bezeichnet, von den Werthen der Grössen c ab und muss in jedem Falle besonders bestimmt werden.

3.

Die gewonnene Formel (θ) ist einer bedeutenden Verallgemeinerung fähig. Um zu derselben zu gelangen, lasse man auf der rechten Seite dieser Formel die Systeme:

$$(rv^{(1)}), \ldots, (rv^{(n)}) \text{ übergehen in } \left(rv^{(1)} + \left|\begin{matrix}\rho^{(1)} \\ \sigma^{(1)}\end{matrix}\right|\right), \ldots, \left(rv^{(n)} + \left|\begin{matrix}\rho^{(n)} \\ \sigma^{(n)}\end{matrix}\right|\right),$$

indem man unter $\rho_1^{(1)}, \ldots, \rho_p^{(1)}; \ldots; \rho_1^{(n)}, \ldots, \rho_p^{(n)}; \sigma_1^{(1)}, \ldots, \sigma_p^{(1)}; \ldots; \sigma_1^{(n)}, \ldots, \sigma_p^{(n)}$ beliebige ganze Zahlen versteht; es gehen dann gleichzeitig die auf der linken Seite stehenden Systeme:

$$(ru^{(1)}), \ldots, (ru^{(n)}) \text{ über in } \left(ru^{(1)} + \left|\begin{matrix}\dfrac{\bar{\bar\rho}^{(1)}}{r} \\ \dfrac{\bar{\bar\sigma}^{(1)}}{r}\end{matrix}\right|\right), \ldots, \left(ru^{(n)} + \left|\begin{matrix}\dfrac{\bar{\bar\rho}^{(n)}}{r} \\ \dfrac{\bar{\bar\sigma}^{(n)}}{r}\end{matrix}\right|\right),$$

wenn man allgemein, d. h. für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\begin{array}{ll}
c_{11}\rho_\mu^{(1)} + c_{21}\rho_\mu^{(2)} + \ldots + c_{n1}\rho_\mu^{(n)} = \overline{\overline{\rho}}_\mu^{(1)}, & c_{11}\sigma_\mu^{(1)} + c_{21}\sigma_\mu^{(2)} + \ldots + c_{n1}\sigma_\mu^{(n)} = \overline{\overline{\sigma}}_\mu^{(1)}, \\
c_{12}\rho_\mu^{(1)} + c_{22}\rho_\mu^{(2)} + \ldots + c_{n2}\rho_\mu^{(n)} = \overline{\overline{\rho}}_\mu^{(2)}, & c_{12}\sigma_\mu^{(1)} + c_{22}\sigma_\mu^{(2)} + \ldots + c_{n2}\sigma_\mu^{(n)} = \overline{\overline{\sigma}}_\mu^{(2)}, \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
c_{1n}\rho_\mu^{(1)} + c_{2n}\rho_\mu^{(2)} + \ldots + c_{nn}\rho_\mu^{(n)} = \overline{\overline{\rho}}_\mu^{(n)}, & c_{1n}\sigma_\mu^{(1)} + c_{2n}\sigma_\mu^{(2)} + \ldots + c_{nn}\sigma_\mu^{(n)} = \overline{\overline{\sigma}}_\mu^{(n)},
\end{array}$$

setzt, und man erhält, wenn man auf die rechte Seite der so entstandenen Gleichung die Formel (D), auf die linke die Formel (A) des Art. 1 anwendet und unter Berücksichtigung der Relationen:

$$\frac{1}{r^2}\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \overline{\overline{\rho}}_\mu^{(\nu)}\overline{\overline{\rho}}_{\mu'}^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \rho_\mu^{(\nu)}\rho_{\mu'}^{(\nu)}, \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \overline{\overline{\rho}}_\mu^{(\nu)} u_\mu^{(\nu)} = r\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \rho_\mu^{(\nu)} v_\mu^{(\nu)}, \qquad \frac{1}{r^2}\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \overline{\overline{\rho}}_\mu^{(\nu)}\overline{\overline{\sigma}}_\mu^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \rho_\mu^{(\nu)}\sigma_\mu^{(\nu)}$$

die den beiden Seiten gemeinsamen Exponentialfactoren durch Division entfernt, die allgemeinere Formel:

$$(\theta') \qquad (r^n s)^p\, \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\overline{\overline{\rho}}^{(1)}}{r} \\ \dfrac{\overline{\overline{\sigma}}^{(1)}}{r} \end{bmatrix}(\!(ru^{(1)})\!) \ldots \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\overline{\overline{\rho}}^{(n)}}{r} \\ \dfrac{\overline{\overline{\sigma}}^{(n)}}{r} \end{bmatrix}(\!(ru^{(n)})\!)$$

$$= \sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,r-1} \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\overline{\alpha}^{(1)}}{r} \\ \dfrac{\overline{\beta}^{(1)}}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(1)})\!) \ldots \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\overline{\alpha}^{(n)}}{r} \\ \dfrac{\overline{\beta}^{(n)}}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(n)})\!)\, e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sum\limits_{\mu=1}^{p}\left(\overline{\alpha}_\mu^{(\nu)}\sigma_\mu^{(\nu)} - \overline{\beta}_\mu^{(\nu)}\rho_\mu^{(\nu)}\right)}.$$

Lässt man jetzt weiter auf der rechten Seite dieser letzten Formel die Systeme:

$$(rv^{(1)}), \ldots, (rv^{(n)}) \text{ übergehen in } \left(rv^{(1)} + \begin{vmatrix} \dfrac{\gamma^{(1)}}{r} \\ \dfrac{\delta^{(1)}}{r} \end{vmatrix}\right), \ldots, \left(rv^{(n)} + \begin{vmatrix} \dfrac{\gamma^{(n)}}{r} \\ \dfrac{\delta^{(n)}}{r} \end{vmatrix}\right),$$

indem man unter $\gamma_1^{(1)}, \ldots, \gamma_p^{(1)}; \ldots; \gamma_1^{(n)}, \ldots, \gamma_p^{(n)}; \delta_1^{(1)}, \ldots, \delta_p^{(1)}; \ldots; \delta_1^{(n)}, \ldots, \delta_p^{(n)}$ zunächst beliebige ganze Zahlen versteht, so gehen dadurch die auf der linken Seite stehenden Systeme:

$$(ru^{(1)}),\ \ldots,\ (ru^{(n)}) \text{ über in } \left(ru^{(1)} + \left|\begin{matrix}\frac{\gamma'^{(1)}}{r}\\ \frac{\delta'^{(1)}}{r}\end{matrix}\right|\right),\ \ldots,\ \left(ru^{(n)} + \left|\begin{matrix}\frac{\gamma'^{(n)}}{r}\\ \frac{\delta'^{(n)}}{r}\end{matrix}\right|\right),$$

wenn man allgemein, d. h. für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\begin{array}{ll}
c_{11}\gamma_\mu^{(1)} + c_{21}\gamma_\mu^{(2)} + \ldots + c_{n1}\gamma_\mu^{(n)} = r\gamma_\mu'^{(1)}, & c_{11}\delta_\mu^{(1)} + c_{21}\delta_\mu^{(2)} + \ldots + c_{n1}\delta_\mu^{(n)} = r\delta_\mu'^{(1)}, \\
c_{12}\gamma_\mu^{(1)} + c_{22}\gamma_\mu^{(2)} + \ldots + c_{n2}\gamma_\mu^{(n)} = r\gamma_\mu'^{(2)}, & c_{12}\delta_\mu^{(1)} + c_{22}\delta_\mu^{(2)} + \ldots + c_{n2}\delta_\mu^{(n)} = r\delta_\mu'^{(2)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_{1n}\gamma_\mu^{(1)} + c_{2n}\gamma_\mu^{(2)} + \ldots + c_{nn}\gamma_\mu^{(n)} = r\gamma_\mu'^{(n)}, & c_{1n}\delta_\mu^{(1)} + c_{2n}\delta_\mu^{(2)} + \ldots + c_{nn}\delta_\mu^{(n)} = r\delta_\mu'^{(n)},
\end{array}$$

setzt. Die Änderungen, welche auf diese Weise die Systeme (ru), (rv) erfahren haben, kann man nun mit Hülfe der Formel (A) des Art. 1 durch entsprechende Änderungen der Charakteristiken unter Hinzufügung von Exponentialgrössen wieder wegschaffen. Stellt man dann die Bedingung, dass die auf der linken Seite entstehenden Charakteristiken denselben Typus besitzen wie die auf der rechten Seite auftretenden, d. h. dass ihre sämmtlichen Elemente sich in die Form von Brüchen mit dem gemeinsamen Nenner r und ganzzahligen Zählern bringen lassen, so müssen die Grössen γ', δ' ganze Zahlen sein. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist aber, dass die ganzen Zahlen γ, δ die Eigenschaft besitzen, dass jedes der p, den Werthen $\mu = 1, 2, \ldots, p$ entsprechenden Systeme $\gamma_\mu^{(1)}, \gamma_\mu^{(2)}, \ldots, \gamma_\mu^{(n)}$, und ebenso jedes der p Systeme $\delta_\mu^{(1)}, \delta_\mu^{(2)}, \ldots, \delta_\mu^{(n)}$ eine Lösung des Congruenzensystems:

$$\begin{array}{l}
c_{11}x^{(1)} + c_{21}x^{(2)} + \ \ldots\ + c_{n1}x^{(n)} \equiv 0 \pmod r, \\
c_{12}x^{(1)} + c_{22}x^{(2)} + \ \ldots\ + c_{n2}x^{(n)} \equiv 0 \pmod r, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_{1n}x^{(1)} + c_{2n}x^{(2)} + \ \ldots\ + c_{nn}x^{(n)} \equiv 0 \pmod r,
\end{array}$$

ist, und es sollen die bis jetzt noch beliebigen ganzen Zahlen γ, δ von nun an dieser Bedingung unterworfen sein. Dann ist aber jedes der p,

den Werthen $\mu = 1, 2, \ldots, p$ entsprechenden Systeme $\gamma_\mu'^{(1)}, \gamma_\mu'^{(2)}, \ldots, \gamma_\mu'^{(n)}$, und ebenso jedes der p Systeme $\delta_\mu'^{(1)}, \delta_\mu'^{(2)}, \ldots, \delta_\mu'^{(n)}$ eine Lösung des in Art. 2 aufgestellten Congruenzensystems (C_0). Wendet man jetzt, nachdem die γ, δ der angeführten Bedingung unterworfen sind, auf die linke wie rechte Seite der in angegebener Weise geänderten Gleichung (θ') die Formel (A) des Art. 1 an und entfernt unter Berücksichtigung der Relationen:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \gamma_\mu'^{(\nu)} \gamma_{\mu'}'^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \gamma_\mu^{(\nu)} \gamma_{\mu'}^{(\nu)}, \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \gamma_\mu'^{(\nu)} u_\mu^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \gamma_\mu^{(\nu)} v_\mu^{(\nu)}, \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \gamma_\mu'^{(\nu)} \delta_\mu'^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \gamma_\mu^{(\nu)} \delta_\mu^{(\nu)}$$

die den beiden Seiten gemeinsamen Exponentialfactoren durch Division, so erhält man schliesslich die Formel:

$$(\theta'') \quad (r^n s)^p \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\bar{\bar\rho}^{(1)} + \gamma'^{(1)}}{r} \\ \dfrac{\bar{\bar\sigma}^{(1)} + \delta'^{(1)}}{r} \end{bmatrix}(\!(ru^{(1)})\!) \ldots \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\bar{\bar\rho}^{(n)} + \gamma'^{(n)}}{r} \\ \dfrac{\bar{\bar\sigma}^{(n)} + \delta'^{(n)}}{r} \end{bmatrix}(\!(ru^{(n)})\!)\, e^{-\frac{2\pi i}{r^2}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \gamma_\mu'^{(\nu)} \bar{\bar\sigma}_\mu^{(\nu)}}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,r-1} \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\bar\alpha^{(1)} + \gamma^{(1)}}{r} \\ \dfrac{\bar\beta^{(1)} + \delta^{(1)}}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(1)})\!) \ldots \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\bar\alpha^{(n)} + \gamma^{(n)}}{r} \\ \dfrac{\bar\beta^{(n)} + \delta^{(n)}}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(n)})\!)\, e^{-\frac{2\pi i}{r^2}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \gamma_\mu^{(\nu)} \bar\beta_\mu^{(\nu)}}$$

$$\times e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \left(\bar\alpha_\mu^{(\nu)} \sigma_\mu^{(\nu)} - \bar\beta_\mu^{(\nu)} \rho_\mu^{(\nu)}\right)}.$$

Diese Formel umfasst die Formeln (θ), (θ') als specielle Fälle und ist zugleich die allgemeinste derartige Formel.

Die auf der rechten Seite der Gleichung (θ'') als Summanden auftretenden r^{2np} Thetaproducte können in $\dfrac{r^{2np}}{s^{2p}}$ Gruppen geordnet werden, indem man zu einer Gruppe jedesmal diejenigen Thetaproducte, immer s^{2p} an der Zahl, zusammenfasst, für welche sich die Werthe der $2np$ Grössen $\dfrac{\bar\alpha_\mu^{(\nu)}}{r}$, $\dfrac{\bar\beta_\mu^{(\nu)}}{r}$ nur um ganze Zahlen ändern, wenn man von einem dieser s^{2p} Thetaproducte zu einem anderen derselben übergeht. Man zeigt dann leicht, dass die s^{2p} in einer Gruppe vorkommenden Thetaproducte denselben Werth besitzen, und kann daher in obiger Summe jede solche Gruppe von Summanden durch das s^{2p}-fache eines beliebigen Summanden

ersetzen. Führt man diese Vereinigung für jede der $\frac{r^{2np}}{s^{2p}}$ Gruppen aus, so geht die rechte Seite der Gleichung (θ'') in das s^{2p}-fache einer Summe von $\frac{r^{2np}}{s^{2p}}$ wesentlich verschiedenen, d. h. durch Anwendung der Formeln (B) des Art. 1 nicht auf einander reducirbaren, Thetaproducten über. Man erkennt auch leicht, dass die Formel (θ'') nichts von ihrer Allgemeinheit verliert, wenn man sämmtliche Grössen ρ, σ der Null gleich setzt, oder wenn man bei unbeschränkter Veränderlichkeit der ganzen Zahlen ρ, σ für die Grössen γ, δ, die im Übrigen stets den aufgestellten Bedingungen zu genügen haben, nur Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, r-1$ zulässt.

Würzburg, im Januar 1883.

ÜBER DIE VERALLGEMEINERUNG
DER RIEMANN'SCHEN THETAFORMEL

VON

A. KRAZER und F. PRYM
in WÜRZBURG.

Die Existenz der in der vorhergehenden Arbeit entwickelten Hauptformel (Θ) ist in gewissem Sinne bedingt durch die Existenz des orthogonalen Gleichungensystems:

$$(\mathrm{O})\qquad \begin{aligned} c_{11}x^{(1)} + c_{12}x^{(2)} + \ldots + c_{1n}x^{(n)} &= ry^{(1)},\\ c_{21}x^{(1)} + c_{22}x^{(2)} + \ldots + c_{2n}x^{(n)} &= ry^{(2)},\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ c_{n1}x^{(1)} + c_{n2}x^{(2)} + \ldots + c_{nn}x^{(n)} &= ry^{(n)}, \end{aligned}$$

insofern als dasselbe die Transformation bestimmt, der gleichzeitig die Variablen und die Summationsbuchstaben in dem den Ausgangspunkt der Untersuchung bildenden Producte von n Thetareihen zu unterwerfen sind. Einen ganz speciellen Fall dieses allgemeinen Systems (O) bildet das der Riemann'schen Thetaformel zu Grunde liegende, zuerst von Jacobi in der Theorie der Thetafunctionen einer Variable und später von Herrn Rosenhain in der Theorie der Thetafunctionen zweier Variablen verwandte System:

$$(\bar{\mathrm{o}})\qquad \begin{aligned} x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} &= 2y^{(1)},\\ x^{(1)} + x^{(2)} - x^{(3)} - x^{(4)} &= 2y^{(2)},\\ x^{(1)} - x^{(2)} + x^{(3)} - x^{(4)} &= 2y^{(3)},\\ x^{(1)} - x^{(2)} - x^{(3)} + x^{(4)} &= 2y^{(4)}. \end{aligned}$$

Als charakteristisches Merkmal dieses speciellen orthogonalen Systems wurde bisher die Eigenschaft angesehen, dass seine Coefficienten, wenn man sie, der beim Systeme (O) angewandten Bezeichnung entsprechend, durch $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}; \ldots; c_{41}, c_{42}, c_{43}, c_{44}$ repräsentirt, den Bedingungen $c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}$, $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$, genügen, oder, mit anderen Worten, dass das System zugleich ein involutorisches ist. Dieser Anschauung entsprechend wurde denn auch, um zu einer Verallgemeinerung der auf dem Systeme $(\bar{o})$ basirenden RIEMANN'schen Thetaformel zu gelangen, bei der betreffenden, in der Einleitung zur vorhergehenden Arbeit erwähnten Untersuchung ebenfalls ein involutorisches orthogonales Gleichungensystem zu Grunde gelegt, d. h. ein orthogonales Gleichungensystem von der Form (O), bei dem die Coefficienten c noch der weiteren Bedingung $c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}$ für jedes μ und ν von 1 bis n unterworfen sind. Da aber die Thetaformel, welche einem solchen durch die Bedingung $c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}$ specialisirten orthogonalen Systeme entspricht, von der in der vorhergehenden Arbeit abgeleiteten, dem allgemeinen orthogonalen Systeme (O) entsprechenden Formel (θ) nur unwesentlich verschieden ist, insofern als sie ohne Weiteres in diese übergeht, sobald man allgemein $c_{\mu\nu}$ mit $c_{\nu\mu}$ als identisch betrachtet, so kann die erwähnte Formel nicht mehr als eine der RIEMANN'schen Thetaformel an die Seite zu stellende allgemeinere Formel angesehen werden, da nichts von dem, was für jene charakteristisch ist, erhalten geblieben, und es drängt sich daher jetzt die Frage auf, worin denn eigentlich das wahre Wesen der RIEMANN'schen Thetaformel oder, was auf dasselbe hinauskommt, des ihr zu Grunde liegenden orthogonalen Systems $(\bar{o})$ zu suchen sei. Ist das wahre Wesen des Systems $(\bar{o})$ ergründet, so wird sich auch die naturgemässe Verallgemeinerung desselben und damit zugleich die naturgemässe Verallgemeinerung der RIEMANN'schen Thetaformel ergeben.

Verschiedene specielle Untersuchungen haben uns nun zu der Erkenntniss geführt, dass als wesentliche Eigenschaft des orthogonalen Systems $(\bar{o})$ nicht die zu betrachten ist, dass dasselbe involutorisch ist, sondern vielmehr die, dass die vier bei ihm auf der linken Seite stehenden Formen:

$$x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)}, \qquad x^{(1)} + x^{(2)} - x^{(3)} - x^{(4)},$$

$$x^{(1)} - x^{(2)} + x^{(3)} - x^{(4)}, \qquad x^{(1)} - x^{(2)} - x^{(3)} + x^{(4)}$$

einander congruent sind nach der auf der rechten Seite stehenden Zahl 2 als Modul, wenn man allgemein zwei lineare Formen:

$$a_1x^{(1)} + a_2x^{(2)} + \ldots + a_nx^{(n)}, \qquad b_1x^{(1)} + b_2x^{(2)} + \ldots + b_nx^{(n)}$$

mit ganzzahligen Coefficienten a, b einander congruent nennt nach einer ganzen Zahl m als Modul, sobald:

$$a_1 \equiv b_1 \pmod m,\ a_2 \equiv b_2 \pmod m,\ \ldots\ldots,\ a_n \equiv b_n \pmod m$$

ist, und die Aufgabe, die wir im Folgenden zunächst lösen werden, besteht darin, zu zeigen, dass das ursprünglich nur der Bedingung der Orthogonalität unterworfene System (O), sobald man für dasselbe die weitere Bedingung einführt, dass die n bei ihm auf der linken Seite stehenden Formen:

$$c_{11}x^{(1)} + \ldots + c_{1n}x^{(n)},\ c_{21}x^{(1)} + \ldots + c_{2n}x^{(n)},\ \ldots\ldots,\ c_{n1}x^{(1)} + \ldots + c_{nn}x^{(n)}$$

einander congruent sind nach der auf der rechten Seite stehenden, zunächst noch unbestimmten ganzen Zahl r als Modul, sowohl in dem Falle, wo n eine ungerade, als auch in dem Falle, wo n eine gerade Zahl ist, von Unwesentlichem abgesehen, in ein in jeder Beziehung wohl bestimmtes System von Gleichungen übergeht. Es wird sich dann weiter ergeben, dass das im letzteren Falle, also bei geradem n, entstehende System für $n = 4$ auf das System ($\bar{\text{o}}$) führt, und dass den beiden allgemeinen Systemen Thetaformeln entsprechen, welche alle die Riemann'sche Thetaformel auszeichnenden Eigenthümlichkeiten besitzen.

1.

Der erste Theil der gestellten Aufgabe besteht darin, die Coefficienten c des Systems:

$$(\text{O}) \qquad \begin{aligned} c_{11}x^{(1)} + c_{12}x^{(2)} + \ldots + c_{1n}x^{(n)} &= ry^{(1)},\\ c_{21}x^{(1)} + c_{22}x^{(2)} + \ldots + c_{2n}x^{(n)} &= ry^{(2)},\\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\ c_{n1}x^{(1)} + c_{n2}x^{(2)} + \ldots + c_{nn}x^{(n)} &= ry^{(n)}, \end{aligned}$$

bei beliebig gegebenem n als ganze Zahlen so zu bestimmen, dass nicht nur dieses System ein orthogonales wird, sondern auch die n auf der linken Seite desselben stehenden linearen Formen einander congruent werden nach der auf der rechten Seite stehenden, zunächst noch unbestimmten ganzen Zahl r als Modul. Der ersten Bedingung entsprechend haben die Zahlen c die Gleichungen:

$$(\mathrm{I_0}) \qquad c_{1\mu}c_{1\mu'} + c_{2\mu}c_{2\mu'} + \ldots + c_{n\mu}c_{n\mu'} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mu' \gtrless \mu, \\ r^2, & \text{wenn } \mu' = \mu, \end{cases}$$

oder, was dasselbe, die damit äquivalenten Gleichungen:

$$(\mathrm{I}) \qquad c_{\mu 1}c_{\mu' 1} + c_{\mu 2}c_{\mu' 2} + \ldots + c_{\mu n}c_{\mu' n} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mu' \gtrless \mu, \\ r^2, & \text{wenn } \mu' = \mu, \end{cases}$$

für jedes μ und μ' von 1 bis n zu erfüllen, während sie nach Hinzutritt der zweiten Bedingung ausserdem noch den Congruenzen:

$$(\mathrm{II}) \qquad c_{1\nu} \equiv c_{2\nu} \equiv \ldots \equiv c_{n\nu} \pmod r$$

für jedes ν von 1 bis n genügen müssen. Bei der folgenden Untersuchung sollen zwei Systeme von je n^2 Zahlen c, die man sich immer in quadratischer Anordnung geschrieben zu denken hat, als nicht verschieden betrachtet werden, wenn man das eine der beiden Systeme aus dem anderen dadurch erhalten kann, dass man die Verticalreihen des letzteren in passender Weise umstellt und die sämmtlichen Glieder gewisser der Verticalreihen mit -1 multiplicirt. Diese Auffassung erscheint gerechtfertigt, einmal, weil alle durch die genannten Operationen aus einem Systeme von Grössen c hervorgehenden neuen Systeme den für diese Grössen oben gestellten Bedingungen (I), (II) genügen, sobald das ursprüngliche System es thut, dann aber auch, weil die den so entstehenden Systemen von Grössen c entsprechenden Gleichungensysteme (O) sämmtlich aus dem ursprünglichen dadurch erhalten werden können, dass man in demselben die Grössen x in passender Weise ihre Plätze wechseln lässt und zugleich gewisse derselben mit negativem Zeichen versieht.

Man setze jetzt zur Abkürzung:

$$c_{11} = p_1, \; c_{12} = p_2, \; \ldots, \; c_{1n} = p_n,$$

und bringe das System $c_{\mu 1}, c_{\mu 2}, \ldots, c_{\mu n}$ für jedes μ von 2 bis n in die Form:

$$c_{\mu 1} = p_1 + q_{\mu 1} r,\ c_{\mu 2} = p_2 + q_{\mu 2} r,\ \ldots\ldots,\ c_{\mu n} = p_n + q_{\mu n} r;$$

es müssen dann, wenn anders die Congruenzen (II) erfüllt sein sollen, die q sämmtlich ganze Zahlen sein. Führt man diese Ausdrücke an Stelle der Grössen c in die Gleichungen (I) ein, nachdem man dieselben in der Form:

$$\begin{aligned} c_{11}^2 + c_{12}^2 + \ldots + c_{1n}^2 &= r^2, \\ c_{\mu 1}^2 + c_{\mu 2}^2 + \ldots + c_{\mu n}^2 &= r^2, \\ c_{11} c_{\mu 1} + c_{12} c_{\mu 2} + \ldots + c_{1n} c_{\mu n} &= 0, \\ c_{\mu 1} c_{\mu' 1} + c_{\mu 2} c_{\mu' 2} + \ldots + c_{\mu n} c_{\mu' n} &= 0, \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 2, 3, \ldots, n, \\ \mu' = 3, \ldots, n, \\ \mu' > \mu, \end{pmatrix}$$

geschrieben hat, so ergeben sich für die ganzen Zahlen p und q zunächst die Gleichungen:

$$p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2 = r^2,$$

$$(p_1^2 + \ldots + p_n^2) + 2(p_1 q_{\mu 1} + \ldots + p_n q_{\mu n}) r + (q_{\mu 1}^2 + \ldots + q_{\mu n}^2) r^2 = r^2,$$

$$(p_1^2 + \ldots + p_n^2) + (p_1 q_{\mu 1} + \ldots + p_n q_{\mu n}) r = 0,$$

$$(p_1^2 + \ldots + p_n^2) + (p_1 q_{\mu 1} + \ldots + p_n q_{\mu n}) r + (p_1 q_{\mu' 1} + \ldots + p_n q_{\mu' n}) r$$
$$+ (q_{\mu 1} q_{\mu' 1} + \ldots + q_{\mu n} q_{\mu' n}) r^2 = 0,$$

und weiter dann, durch passende Verbindung derselben, die damit äquivalenten Gleichungen:

$$p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2 = r^2, \tag{1}$$

$$p_1 q_{\mu 1} + p_2 q_{\mu 2} + \ldots + p_n q_{\mu n} = -r, \tag{2}$$

$$q_{\mu 1}^2 + q_{\mu 2}^2 + \ldots + q_{\mu n}^2 = 2, \tag{3}$$

$$q_{\mu 1} q_{\mu' 1} + q_{\mu 2} q_{\mu' 2} + \ldots + q_{\mu n} q_{\mu' n} = 1, \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} \mu = 2, 3, \ldots, n, \\ \mu' = 3, \ldots, n, \\ \mu' > \mu, \end{pmatrix}$$

deren Erfülltsein umgekehrt immer auch das Erfülltsein der Gleichungen (I) nach sich zieht.

Zunächst folgt nun aus der Gleichung (3), dass von den n derselben Horizontalreihe angehörigen Zahlen q immer $n - 2$ den Werth 0 haben müssen, eine jede der beiden anderen aber einen der Werthe $+1$, -1 besitzen muss. Allgemein sollen für die μ^{te} Horizontalreihe die beiden von 0 verschiedenen Grössen q mit $q_{\mu\rho_\mu}$, $q_{\mu\sigma_\mu}$ bezeichnet werden, sodass also ρ_μ, σ_μ die diesen beiden Grössen q entsprechenden Stellenzahlen in der Reihe $1, 2, \ldots, n$ sind; welche der beiden Stellenzahlen aber mit ρ_μ, welche mit σ_μ zu bezeichnen ist, das soll erst später festgesetzt werden. Die Gleichung (4) zeigt dann weiter, dass irgend zwei, zu zwei verschiedenen Horizontalreihen gehörige, Zahlenpaare ρ, σ — ρ_μ, σ_μ das eine, $\rho_{\mu'}$, $\sigma_{\mu'}$ das andere — immer in der Beziehung zu einander stehen, dass eine Zahl des einen Paares mit einer Zahl des anderen Paares übereinstimmt, während die beiden noch übrigen Zahlen von einander verschieden sind; auch ergibt sich zugleich, dass die den beiden gleichen Stellenzahlen entsprechenden Grössen q denselben Werth, $+1$ oder -1, besitzen müssen.

Man kann nun dem Gefundenen entsprechend zunächst in der zweiten und dritten Horizontalreihe die Bezeichnung für die Stellenzahlen der beiden jedesmal von 0 verschiedenen Grössen q so einrichten, dass $\rho_3 = \rho_2$ ist; es ist dann $\sigma_3 \gtrless \sigma_2$. In Bezug auf die beiden zur vierten Horizontalreihe gehörigen Zahlen ρ_4, σ_4 sind jetzt, bei passender Wahl der Bezeichnung, nur die beiden folgenden Fälle möglich: entweder ist $\rho_4 = \rho_3 = \rho_2$ und folglich σ_4 sowohl von σ_2 wie von σ_3 verschieden; oder aber es ist $\rho_4 = \sigma_2$ und folglich $\sigma_4 = \sigma_3$. Im letzteren Falle existirt zu den drei Zahlenpaaren ρ_2, σ_2; ρ_3, σ_3; ρ_4, σ_4 überhaupt kein viertes Zahlenpaar, welches der Bedingung genügt, mit jedem der drei Zahlenpaare eine und nur eine Zahl gemeinsam zu haben. Dieser Fall kann also nur für $n = 4$ eintreten und soll im Späteren besonders behandelt werden. Im ersten Falle dagegen muss von den beiden der fünften Horizontalreihe zugehörigen Zahlen ρ_5, σ_5 die eine mit $\rho_4 = \rho_3 = \rho_2$ übereinstimmen; dieselbe sei mit ρ_5 bezeichnet; die andere, σ_5, ist dann von σ_2, σ_3 und σ_4 verschieden. Aus denselben Gründen muss aber weiter von den beiden der sechsten Horizontalreihe zugehörigen Zahlen ρ_6, σ_6 die eine, die mit ρ_6 bezeichnet werde, mit $\rho_5 = \ldots = \rho_2$ übereinstimmen; die andere, σ_6, ist dann von $\sigma_2, \ldots, \sigma_5$ verschieden. Indem man diese Schlussweise unter Beibehaltung der bisher angewandten Bezeichnungsart fortsetzt, findet man allgemein

für die der μ^{ten} Horizontalreihe zugehörigen Zahlen ρ_μ, σ_μ, dass die eine derselben, die wieder mit ρ_μ bezeichnet werde, mit $\rho_{\mu-1} = \ldots = \rho_2$ übereinstimmen muss; die andere, σ_μ, ist dann von $\sigma_2, \ldots, \sigma_{\mu-1}$ verschieden. Daraus folgt aber schliesslich, dass die $n - 1$ Zahlenpaare:

$$\rho_2, \sigma_2; \quad \rho_3, \sigma_3; \ldots ; \rho_n, \sigma_n$$

die Form:

$$\rho_2, \sigma_2; \quad \rho_2, \sigma_3; \ldots ; \rho_2, \sigma_n$$

haben müssen, wo ρ_2 eine bestimmte Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ bezeichnet, $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$ die $n - 1$ übrigen Zahlen dieser Reihe sind. In welcher Reihenfolge die Zahlen $\rho_2, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$ mit den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ übereinstimmen, ist für die beabsichtigte Bestimmung der Grössen c gleichgiltig, da man durch passende Umstellung der Verticalreihen des zugehörigen Systems der Grössen c jede mögliche Reihenfolge erzielen kann, solche Systeme von Grössen c aber, welche durch Umstellung von Verticalreihen auf eines von ihnen reducirt werden können, nach früher getroffenem Übereinkommen als nicht verschieden betrachtet werden. Das gewonnene Resultat verliert daher nichts von seiner Allgemeinheit, wenn man:

$$\rho_2 = 1, \qquad \sigma_2 = 2, \qquad \sigma_3 = 3, \ldots, \sigma_n = n$$

setzt. Geschieht dies, so wird, wenn man allgemein unter ε_ν eine Grösse versteht, welche entweder gleich $+1$ oder gleich -1 ist:

$$q_{21} = q_{31} = \cdots = q_{n1} = \varepsilon_1, \quad q_{22} = -\varepsilon_2, \; q_{33} = -\varepsilon_3, \ldots, q_{nn} = -\varepsilon_n,$$

während alle noch übrigen Zahlen q den Werth 0 haben, und es gewinnt durch Einführung der so bestimmten Werthe der q in die oben für die Grössen c aufgestellten Ausdrücke das zu bestimmende System der Grössen c die folgende Form:

$$(\Sigma) \qquad \begin{array}{lllll}
p_1 , & p_2 , & p_3 , & \ldots , & p_n , \\
p_1 + \varepsilon_1 r, & p_2 - \varepsilon_2 r, & p_3 , & \ldots , & p_n , \\
p_1 + \varepsilon_1 r, & p_2 , & p_3 - \varepsilon_3 r, & \ldots , & p_n , \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
p_1 + \varepsilon_1 r, & p_2 , & p_3 , & \ldots , & p_n - \varepsilon_n r,
\end{array}$$

bei der jetzt noch die n Grössen p als ganze Zahlen und die an Stelle der q getretenen Grössen ε als Zahlen ± 1 so zu bestimmen sind, dass auch die Bedingungen (1), (2) erfüllt werden.

Für $n = 4$ tritt, wie schon oben erwähnt, noch ein specielles System hinzu, das durch die Beziehungen $\rho_3 = \rho_2$, $\rho_4 = \sigma_2$, $\sigma_4 = \sigma_3$ charakterisirt ist, und das, wenn man ähnlich wie oben:

$$\rho_2 = 1, \qquad \sigma_2 = 2, \qquad \sigma_3 = 3,$$

auch:

$$q_{21} = q_{31} = \varepsilon_1, \qquad q_{22} = q_{42} = -\varepsilon_2, \qquad q_{33} = q_{43} = -\varepsilon_3$$

setzt, die Gestalt annimmt:

$$(\sigma) \qquad \begin{array}{llll} p_1 \qquad\quad, & p_2 \qquad\quad, & p_3 \qquad\quad, & p_4, \\ p_1 + \varepsilon_1 r, & p_2 - \varepsilon_2 r, & p_3 \qquad\quad, & p_4, \\ p_1 + \varepsilon_1 r, & p_2 \qquad\quad, & p_3 - \varepsilon_3 r, & p_4, \\ p_1 \qquad\quad, & p_2 - \varepsilon_2 r, & p_3 - \varepsilon_3 r, & p_4. \end{array}$$

Die noch ausstehende Bestimmung der Grössen p und ε auf Grund der Gleichungen (1), (2) soll jetzt zunächst bei dem allgemeinen Systeme (Σ) durchgeführt werden. Berücksichtigt man, dass von den n in der Gleichung (2) vorkommenden Grössen $q_{\mu 1}, \ldots, q_{\mu n}$ nur die beiden Grössen $q_{\mu 1}$ und $q_{\mu\mu}$ einen von Null verschiedenen Werth besitzen, und dass $q_{\mu 1} = \varepsilon_1$, $q_{\mu\mu} = -\varepsilon_\mu$ gesetzt wurde, so erkennt man, dass die Grössen p und ε den Gleichungen:

$$p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2 = r^2,$$

$$\varepsilon_1 p_1 - \varepsilon_\mu p_\mu = -r, \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, n)$$

gemäss zu bestimmen sind. Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt, da stets $\varepsilon_1^2 = 1$, $\varepsilon_\mu^2 = 1$ ist, für jedes μ von 2 bis n:

$$p_\mu = \varepsilon_1 \varepsilon_\mu (p_1 + \varepsilon_1 r),$$

und man erhält dann weiter, wenn man

$$p_1 + \varepsilon_1 r = P$$

setzt:

$$p_1 = P - \varepsilon_1 r, \qquad p_\mu = \varepsilon_1 \varepsilon_\mu P, \qquad p_\mu - \varepsilon_\mu r = \varepsilon_1 \varepsilon_\mu (P - \varepsilon_1 r). \quad {\scriptstyle (\mu = 2, 3, \ldots, n)}$$

Führt man die gewonnenen Ausdrücke an Stelle der Grössen p in die erste der beiden vorher aufgestellten Gleichungen ein, so geht dieselbe über in:

$$P(nP - 2\varepsilon_1 r) = 0,$$

und es können daher für P nur die beiden Werthe:

$$P = 0, \qquad P = \frac{2\varepsilon_1 r}{n}$$

auftreten. Im ersten dieser beiden Fälle erhält man für die Grössen p die ganzzahligen Werthe:

$$p_1 = -\varepsilon_1 r, \; p_2 = 0, \; \ldots\ldots, \; p_n = 0,$$

und das vorher aufgestellte, mit (Σ) bezeichnete System der Grössen c nimmt durch Einführung dieser Werthe die Form an:

$$(\Sigma_0'') \qquad \begin{array}{cccc} -\varepsilon_1 r, & 0, & \ldots, & 0, \\ 0, & -\varepsilon_2 r, & \ldots, & 0, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, & -\varepsilon_n r. \end{array}$$

Im zweiten Falle dagegen erhält man für die Grössen p die Werthe:

$$p_1 = \varepsilon_1\left(\frac{2r}{n} - r\right), \; p_2 = \varepsilon_2 \frac{2r}{n}, \; \ldots\ldots, \; p_n = \varepsilon_n \frac{2r}{n},$$

zugleich aber auch noch, da die Grössen p stets ganze Zahlen sein müssen, für die ganze Zahl r die Bedingung, dass $2r$ durch n theilbar ist. Nimmt

man diese Bedingung als erfüllt an und führt die gefundenen Werthe an Stelle der Grössen p in das System (Σ) ein, so geht dasselbe über in:

$$(\Sigma')\qquad \begin{array}{llll}
\varepsilon_1\left(\frac{2r}{n}-r\right), & \varepsilon_2\frac{2r}{n} & ,\ldots, & \varepsilon_n\frac{2r}{n}\quad , \\
\varepsilon_1\frac{2r}{n} & ,\ \varepsilon_2\left(\frac{2r}{n}-r\right), & \ldots, & \varepsilon_n\frac{2r}{n}\quad , \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\varepsilon_1\frac{2r}{n} & ,\ \varepsilon_2\frac{2r}{n} & ,\ldots, & \varepsilon_n\left(\frac{2r}{n}-r\right).
\end{array}$$

Wird die entsprechende Untersuchung für das im Falle $n=4$ noch hinzugetretene System (σ) durchgeführt, so erhält man für die darin vorkommenden Grössen p_1, p_2, p_3, p_4, wenn man noch unter ε_4 eine Grösse versteht, die ebenso wie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ entweder den Werth $+1$ oder den Werth -1 besitzt, die Werthe:

$$p_1 = -\varepsilon_1\frac{r}{2}, \qquad p_2 = \varepsilon_2\frac{r}{2}, \qquad p_3 = \varepsilon_3\frac{r}{2}, \qquad p_4 = \varepsilon_4\frac{r}{2},$$

zugleich aber auch noch, da diese Grössen stets ganze Zahlen sein müssen, für die ganze Zahl r die Bedingung, dass dieselbe gerade ist. Nimmt man diese Bedingung als erfüllt an und führt die gefundenen Werthe an Stelle der Grössen p in das System (σ) ein, so geht dasselbe über in:

$$(\sigma')\qquad \begin{array}{llll}
-\varepsilon_1\frac{r}{2}, & \varepsilon_2\frac{r}{2}, & \varepsilon_3\frac{r}{2}, & \varepsilon_4\frac{r}{2}, \\
\varepsilon_1\frac{r}{2}, & -\varepsilon_2\frac{r}{2}, & \varepsilon_3\frac{r}{2}, & \varepsilon_4\frac{r}{2}, \\
\varepsilon_1\frac{r}{2}, & \varepsilon_2\frac{r}{2}, & -\varepsilon_3\frac{r}{2}, & \varepsilon_4\frac{r}{2}, \\
-\varepsilon_1\frac{r}{2}, & -\varepsilon_2\frac{r}{2}, & -\varepsilon_3\frac{r}{2}, & \varepsilon_4\frac{r}{2}.
\end{array}$$

Ein jedes der drei im Vorigen gewonnenen, mit (Σ'_0), (Σ'), (σ') bezeichneten Systeme von Grössen erfüllt die im Eingange dieses Artikels für

ein System von Grössen c gestellten Bedingungen (I), (II), wenn nur, der gemachten Annahme entsprechend, allgemein $\varepsilon_\nu^2 = 1$ ist, und es kann daher für jede der Grössen ε sowohl der Werth $+1$, als auch der Werth -1 gesetzt werden. Die sämmtlichen speciellen Systeme, welche auf diese Weise aus einem der drei Systeme (Σ_0'), (Σ'), (σ') hervorgehen, können aber stets auf ein beliebiges unter ihnen dadurch reducirt werden, dass man bei jedem derselben die sämmtlichen Glieder gewisser seiner Verticalreihen mit -1 multiplicirt, und sind folglich nach früher getroffenem Übereinkommen als nicht verschieden zu betrachten. Man kann daher, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, bei den Systemen (Σ_0'), (Σ'), (σ') eine jede der Grössen ε nach Belieben durch eine der beiden Zahlen $+1$, -1 ersetzen.

Bei dem Systeme (Σ_0') setze man nun:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = -1;$$

es entsteht dann ein System von Grössen c, zu dem als Gleichungensystem (O) das System:

$$rx_1 = ry_1, \; rx_2 = ry_2, \; \ldots \; , \; rx_n = ry_n$$

gehört. Dieses Gleichungensystem ist für das Folgende von keiner Bedeutung, da die ihm entsprechende Thetaformel, einerlei, welchen Werth man der ganzen Zahl r beilegt, in Bezug auf die darin vorkommenden Thetafunctionen immer den Charakter einer identischen Gleichung besitzt.

Bei dem Systeme (Σ') setze man dagegen:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = +1;$$

dem dadurch entstehenden Systeme von Grössen c entspricht dann als Gleichungensystem (O), wenn man noch zur Abkürzung die ganze Zahl $\frac{2r}{n}$ mit g bezeichnet, also $\frac{2r}{n} = g$ setzt, das System:

$$(\mathrm{O}')\quad \begin{array}{rl} (g-r)x^{(1)} + \quad gx^{(2)} + \ldots + \quad gx^{(n)} &= ry^{(1)}, \\ gx^{(1)} + (g-r)x^{(2)} + \ldots + \quad gx^{(n)} &= ry^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ gx^{(1)} + \quad gx^{(2)} + \ldots + (g-r)x^{(n)} &= ry^{(n)}. \end{array}$$

Für die weitere Untersuchung dieses Systems ist jetzt der Fall, wo n eine ungerade Zahl ist, von dem Falle, wo n eine gerade Zahl ist, zu trennen.

1.) Es sei n eine ungerade Zahl, $n = 2\nu + 1$; dann muss die ganze Zahl r, da $2r$ durch n theilbar sein soll, die Form $r = k(2\nu + 1)$ haben, wo k eine ganze Zahl bezeichnet, und es ergeben sich weiter für g und $g - r$ die Werthe $g = 2k$, $g - r = k(1 - 2\nu)$. Nun ist aber die dem Systeme (O′) bei beliebigem Werthe von k entsprechende Thetaformel von der dem Systeme (O′) für $k = 1$ entsprechenden nicht wesentlich verschieden, insofern als man, wie eine einfache Überlegung zeigt, jene aus dieser erhalten kann, indem man jede der vorkommenden unabhängigen Veränderlichen v durch kv ersetzt, wodurch dann gleichzeitig jede Variable u in ku übergeht. Man kann sich daher für das Folgende, wo es sich um die Aufstellung der dem Systeme (O′) entsprechenden Thetaformel handelt, auf den Werth $k = 1$ beschränken, oder, was auf dasselbe hinauskommt, den allen Coefficienten des Systems (O′) gemeinsamen ganzzahligen Factor k durch Division entfernen, und man erhält so für den vorliegenden Fall, wo n eine ungerade Zahl ist, das wohl bestimmte fundamentale System:

$$(\mathrm{O}_1)\quad \begin{array}{rcl} (1-2\nu)x^{(1)} + 2x^{(2)} + \ldots + 2x^{(2\nu+1)} &=& (2\nu+1)y^{(1)}, \\ 2x^{(1)} + (1-2\nu)x^{(2)} + \ldots + 2x^{(2\nu+1)} &=& (2\nu+1)y^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \\ 2x^{(1)} + 2x^{(2)} + \ldots + (1-2\nu)x^{(2\nu+1)} &=& (2\nu+1)y^{(2\nu+1)}. \end{array}$$

2.) Es sei n eine gerade Zahl, $n = 2\nu$; dann muss die ganze Zahl r, da $2r$ durch n theilbar sein soll, die Form $r = k\nu$ haben, wo k eine ganze Zahl bezeichnet, und es ergeben sich weiter für g und $g - r$ die Werthe $g = k$, $g - r = k(1 - \nu)$. Aus denselben Gründen wie vorher kann man sich aber auch hier auf den Werth $k = 1$ beschränken und erhält dann für den vorliegenden Fall, wo n eine gerade Zahl ist, das wohl bestimmte fundamentale System:

$$(\mathrm{O}_2)\quad \begin{array}{rcl} (1-\nu)x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(2\nu)} &=& \nu y^{(1)}, \\ x^{(1)} + (1-\nu)x^{(2)} + \ldots + x^{(2\nu)} &=& \nu y^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \\ x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + (1-\nu)x^{(2\nu)} &=& \nu y^{(2\nu)}. \end{array}$$

Es ist jetzt schliesslich noch das im Falle $n = 4$ hinzugetretene System (σ') näher zu untersuchen. Bei demselben setze man:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = +1$$

und berücksichtige, dass die ganze Zahl r bei diesem Systeme durch 2 theilbar, also von der Form $r = 2k$ sein muss, wo k eine ganze Zahl bezeichnet. Ebenso wie früher kann man sich aber auch hier unbeschadet der Allgemeinheit auf den Werth $k = 1$ beschränken und erhält dann aus dem Systeme (σ') ein System von Grössen c, dem als Gleichungensystem (O) das im Folgenden mit (o′) bezeichnete System entspricht. Man hat daher, wenn man das aus (O_2) für $\nu = 2$ hervorgehende specielle, im Folgenden mit (o) bezeichnete, System noch hinzunimmt, im Falle $n = 4$ die beiden Systeme:

$$(\mathrm{o})\qquad \begin{aligned} -x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} &= 2y^{(1)},\\ x^{(1)} - x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} &= 2y^{(2)},\\ x^{(1)} + x^{(2)} - x^{(3)} + x^{(4)} &= 2y^{(3)},\\ x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} - x^{(4)} &= 2y^{(4)}, \end{aligned}$$

$$(\mathrm{o}')\qquad \begin{aligned} -x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} &= 2y^{(1)},\\ x^{(1)} - x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} &= 2y^{(2)},\\ x^{(1)} + x^{(2)} - x^{(3)} + x^{(4)} &= 2y^{(3)},\\ -x^{(1)} - x^{(2)} - x^{(3)} + x^{(4)} &= 2y^{(4)}, \end{aligned}$$

die zunächst als verschieden zu betrachten sind, da das Coefficientensystem des einen nicht aus dem des anderen dadurch erhalten werden kann, dass man die Verticalreihen des letzteren in passender Weise umstellt und die sämmtlichen Glieder gewisser der Verticalreihen mit -1 multiplicirt.

Nun kann man aber das System (o′) aus dem Systeme (o) dadurch erhalten, dass man in der letzten Gleichung desselben $y^{(4)}$ durch $-y^{(4)}$ ersetzt und zugleich linke und rechte Seite dieser Gleichung mit -1 multiplicirt. Die dem Systeme (o) entsprechende Thetaformel, die aus der Formel (θ_2) des Art. 3 für $r=2$ hervorgeht, wird daher in die dem Systeme (o′) entsprechende übergehen, wenn man das System $(-v^{(4)})$ an Stelle des Systems $(v^{(4)})$ setzt. Da aber eine jede der in dieser Formel vorkommenden Thetafunctionen in ihrer Charakteristik nur halbe Zahlen als Elemente enthält und folglich entweder eine gerade oder eine ungerade Function ist, so bewirkt die Änderung des Argumentensystems $(v^{(4)})$ in $(-v^{(4)})$ bei dem auf der rechten Seite hinter dem Summenzeichen als allgemeines Glied stehenden Thetaproducte nur die Ausscheidung eines Factors, der entweder den Werth $+1$ oder den Werth -1 besitzt, und es bleibt daher der Typus der ursprünglichen Formel, der darin besteht, dass die sämmtlichen Thetafunctionen eines Productes dieselbe Charakteristik besitzen, erhalten. Aus diesem Grunde sind die Systeme (o), (o′) als nicht verschieden zu betrachten, und da zudem das System (o′) in das der Riemann'schen Thetaformel zu Grunde liegende System $(\bar{o})$ dadurch übergeführt werden kann, dass man bei demselben die sämmtlichen Coefficienten der ersten Verticalreihe mit -1 multiplicirt und dann die Verticalreihen der Coefficienten in passender Weise umstellt, so folgt schliesslich, dass auch die Riemann'sche Thetaformel von der dem Systeme (o) entsprechenden Thetaformel nicht wesentlich verschieden ist, und es ist daher die dem Systeme (O_2) entsprechende, für eine beliebige gerade Zahl $n=2\nu$ auftretende Thetaformel (Formel (θ_2) des Art. 3) im engeren Sinne als die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel anzusehen, während die dem Systeme (O_1) entsprechende Thetaformel (Formel (θ_1) des Art. 2) als die zu einer beliebigen ungeraden Zahl $n=2\nu+1$ gehörige analoge Thetaformel erscheint. Diese Thetaformeln sollen jetzt hergestellt werden.

2.

Die dem Systeme (O_1) entsprechende Thetaformel soll zunächst aufgestellt werden. Bezeichnet man in diesem Systeme die Zahl $2\nu + 1$ wieder mit r, so nimmt dasselbe die Gestalt:

$$(O_1)\qquad \begin{array}{rcrcccrcl} (2-r)x^{(1)} &+& 2x^{(2)} &+& \ldots &+& 2x^{(r)} &=& ry^{(1)}, \\ 2x^{(1)} &+& (2-r)x^{(2)} &+& \ldots &+& 2x^{(r)} &=& ry^{(2)}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2x^{(1)} &+& 2x^{(2)} &+& \ldots &+& (2-r)x^{(r)} &=& ry^{(r)}, \end{array}$$

an; man hat aber dabei im Auge zu behalten, dass r eine ungerade Zahl bedeutet. Lässt man nun das in der vorigen Arbeit zu Grunde gelegte, allgemeine orthogonale System (O) in das soeben aufgestellte specielle System (O_1) übergehen, indem man berücksichtigt, dass bei diesem letzteren $n = r$ ist, so geht zugleich die dort aufgestellte, dem Systeme (O) entsprechende Thetaformel (θ) in die dem Systeme (O_1) entsprechende über, und man erhält dadurch diese letztere in der Gestalt:

$$(r^r s)^r \vartheta((ru^{(1)})) \ldots \vartheta((ru^{(r)})) = \sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,r-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(1)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(1)}}{r} \end{bmatrix}((rv^{(1)})) \ldots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(r)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(r)}}{r} \end{bmatrix}((rv^{(r)})),$$

wobei die Grössen u lineare Functionen der als unabhängige Veränderliche anzusehenden Grössen v bezeichnen, definirt durch die p Gleichungensysteme:

$$\begin{array}{rcrcrcccrl} ru_\mu^{(1)} &=& (2-r)v_\mu^{(1)} &+& 2v_\mu^{(2)} &+& \ldots &+& 2v_\mu^{(r)}, & \\ ru_\mu^{(2)} &=& 2v_\mu^{(1)} &+& (2-r)v_\mu^{(2)} &+& \ldots &+& 2v_\mu^{(r)}, & \\ & & & & & & & & & {\scriptstyle(\mu=1,2,\ldots,p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ ru_\mu^{(r)} &=& 2v_\mu^{(1)} &+& 2v_\mu^{(2)} &+& \ldots &+& (2-r)v_\mu^{(r)}; & \end{array}$$

wobei ferner für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}_\mu^{(1)} &= (2-r)\alpha_\mu^{(1)} + 2\alpha_\mu^{(2)} + \ldots + 2\alpha_\mu^{(r)},\\
\bar{\alpha}_\mu^{(2)} &= 2\alpha_\mu^{(1)} + (2-r)\alpha_\mu^{(2)} + \ldots + 2\alpha_\mu^{(r)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\bar{\alpha}_\mu^{(r)} &= 2\alpha_\mu^{(1)} + 2\alpha_\mu^{(2)} + \ldots + (2-r)\alpha_\mu^{(r)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}_\mu^{(1)} &= (2-r)\beta_\mu^{(1)} + 2\beta_\mu^{(2)} + \ldots + 2\beta_\mu^{(r)},\\
\bar{\beta}_\mu^{(2)} &= 2\beta_\mu^{(1)} + (2-r)\beta_\mu^{(2)} + \ldots + 2\beta_\mu^{(r)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\bar{\beta}_\mu^{(r)} &= 2\beta_\mu^{(1)} + 2\beta_\mu^{(2)} + \ldots + (2-r)\beta_\mu^{(r)},
\end{aligned}$$

und die Summation auf der rechten Seite in der Weise auszuführen ist, dass jede der rp Grössen α, wie auch jede der rp Grössen β unabhängig von den anderen die Werthe $0, 1, \ldots, r-1$ durchläuft; wobei endlich s die noch zu bestimmende Anzahl der nach dem Modul r incongruenten oder, was auf dasselbe hinauskommt, der ausschliesslich aus Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots, r-1$ als Elementen gebildeten Lösungen des Congruenzensystems:

$$\begin{aligned}
(2-r)x^{(1)} + 2x^{(2)} + \ldots + 2x^{(r)} &\equiv 0 \pmod{r},\\
2x^{(1)} + (2-r)x^{(2)} + \ldots + 2x^{(r)} &\equiv 0 \pmod{r},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
2x^{(1)} + 2x^{(2)} + \ldots + (2-r)x^{(r)} &\equiv 0 \pmod{r},
\end{aligned}$$

bezeichnet.

Um den Werth der Zahl s zu bestimmen, berücksichtige man, dass die r Formen, welche die linken Seiten der soeben aufgestellten Congruenzen bilden, in früher angegebenem Sinne einander congruent sind nach dem Modul r, und dass in Folge dessen die Lösungen des Congruenzensystems identisch sind mit den Lösungen einer einzigen der in ihm enthaltenen

Congruenzen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, mit den Lösungen der Congruenz:

$$2x^{(1)} + 2x^{(2)} + \ldots + 2x^{(r)} \equiv 0 \pmod r.$$

Diese Congruenz besitzt aber r^{r-1} nach dem Modul r incongruente Lösungen; man erhält dieselben, wenn man in den Gleichungen:

$$x^{(1)} = \xi^{(1)}, \quad x^{(2)} = \xi^{(2)}, \ldots, \quad x^{(r-1)} = \xi^{(r-1)}, \quad x^{(r)} = \xi^{(r)}$$

an Stelle des Systems der $r - 1$ Zahlen $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(r-1)}$ der Reihe nach die sämmtlichen r^{r-1} Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, r-1$ zur $(r-1)^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung treten lässt und jedesmal dann für $\xi^{(r)}$ diejenige einzige Zahl aus der Reihe $0, 1, \ldots, r-1$ setzt, welche der Congruenz:

$$2\xi^{(r)} \equiv -2\xi^{(1)} - 2\xi^{(2)} - \ldots - 2\xi^{(r-1)} \pmod r$$

genügt. Es ist demnach $s = r^{r-1}$.

Die auf der rechten Seite der aufgestellten Thetaformel bei der Ausführung der Summation auftretenden r^{2rp} Thetaproducte können mit Hülfe der Relationen:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_\mu + 1 \ldots g_p \\ h_1 \ldots \quad h_\mu \quad \ldots h_p \end{bmatrix}(\!(v)\!) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_\mu \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_\mu \ldots h_p \end{bmatrix}(\!(v)\!),$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots \quad g_\mu \quad \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_\mu + 1 \ldots h_p \end{bmatrix}(\!(v)\!) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_\mu \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_\mu \ldots h_p \end{bmatrix}(\!(v)\!)\, e^{2g_\mu \pi i}$$

auf eine geringere Anzahl reducirt werden. Zu dem Ende setze man für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$2\alpha_\mu^{(1)} + 2\alpha_\mu^{(2)} + \ldots + 2\alpha_\mu^{(r)} = A_\mu,$$

$$2\beta_\mu^{(1)} + 2\beta_\mu^{(2)} + \ldots + 2\beta_\mu^{(r)} = B_\mu,$$

und bringe die Grössen $\bar\alpha$, $\bar\beta$ in die Form:

$$\bar\alpha_\mu^{(1)} = A_\mu - r\alpha_\mu^{(1)}, \quad \bar\alpha_\mu^{(2)} = A_\mu - r\alpha_\mu^{(2)}, \ldots, \quad \bar\alpha_\mu^{(r)} = A_\mu - r\alpha_\mu^{(r)},$$

$$\bar\beta_\mu^{(1)} = B_\mu - r\beta_\mu^{(1)}, \quad \bar\beta_\mu^{(2)} = B_\mu - r\beta_\mu^{(2)}, \ldots, \quad \bar\beta_\mu^{(r)} = B_\mu - r\beta_\mu^{(r)}.$$

Unter Benutzung der soeben angeschriebenen Hülfsformeln erhält man dann die Relation:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\overline{\alpha}^{(\nu)}}{r}\\ \frac{\overline{\beta}^{(\nu)}}{r}\end{bmatrix}((rv^{(\nu)})) = \vartheta\begin{bmatrix}\frac{A}{r}-\alpha^{(\nu)}\\ \frac{B}{r}-\beta^{(\nu)}\end{bmatrix}((rv^{(\nu)})) = \vartheta\begin{bmatrix}\frac{A}{r}\\ \frac{B}{r}\end{bmatrix}((rv^{(\nu)}))\, e^{-\frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}A_\mu\beta_\mu^{(\nu)}\pi i},$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, r$, und weiter, da für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\beta_\mu^{(1)} + \beta_\mu^{(2)} + \ldots + \beta_\mu^{(r)} = \frac{B_\mu}{2}$$

ist, die Gleichung:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\overline{\alpha}^{(1)}}{r}\\ \frac{\overline{\beta}^{(1)}}{r}\end{bmatrix}((rv^{(1)}))\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\overline{\alpha}^{(r)}}{r}\\ \frac{\overline{\beta}^{(r)}}{r}\end{bmatrix}((rv^{(r)})) = \vartheta\begin{bmatrix}\frac{A}{r}\\ \frac{B}{r}\end{bmatrix}((rv^{(1)}))\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{A}{r}\\ \frac{B}{r}\end{bmatrix}((rv^{(r)}))\, e^{-\frac{1}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}A_\mu B_\mu\pi i}.$$

Dabei ist, wie es bisher stets geschehen, durchgehends eine Charakteristik von der Form $\begin{bmatrix}g_1 \ldots g_p\\ h_1 \ldots h_p\end{bmatrix}$ abgekürzt durch $\begin{bmatrix}g\\ h\end{bmatrix}$ bezeichnet. Auf Grund der letzten Gleichung nimmt nun die aufgestellte Thetaformel, wenn man darin noch an Stelle von s den dafür gefundenen Werth r^{p-1} einführt und, indem man berücksichtigt, dass die ganzen Zahlen A, B sämmtlich gerade sind,

$$e^{-\frac{1}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}A_\mu B_\mu\pi i} \quad \text{durch} \quad e^{\frac{r-1}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}A_\mu B_\mu\pi i}$$

ersetzt, zunächst die Gestalt an:

$$r^{(2r-1)p}\,\vartheta((ru^{(1)}))\ldots\vartheta((ru^{(r)})) = \sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,r-1}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{A}{r}\\ \frac{B}{r}\end{bmatrix}((rv^{(1)}))\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{A}{r}\\ \frac{B}{r}\end{bmatrix}((rv^{(r)}))\, e^{\frac{r-1}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}A_\mu B_\mu\pi i}.$$

Bei der Ausführung der auf der rechten Seite dieser Formel angedeuteten Summation durchläuft jede der $2p$ in der Charakteristik:

$$\begin{bmatrix}\frac{A}{r}\\ \frac{B}{r}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{A_1}{r}\ldots\frac{A_p}{r}\\ \frac{B_1}{r}\ldots\frac{B_p}{r}\end{bmatrix}$$

sowie in dem hinter dem Thetaproducte stehenden Exponentialfactor vorkommenden Grössen $A_1, \ldots, A_p, B_1, \ldots, B_p$ unabhängig von den anderen die Reihe der r^r ganzen Zahlen, die aus

$$2x^{(1)} + 2x^{(2)} + \ldots + 2x^{(r)}$$

hervorgehen, wenn man an Stelle des Systems der r Grössen $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r)}$ der Reihe nach die sämmtlichen Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, r-1$ zur r^{ten} Classe mit Wiederholung treten lässt. Berücksichtigt man nun, dass die Congruenz:

$$2x^{(1)} + 2x^{(2)} + \ldots + 2x^{(r)} \equiv 0 \pmod{r},$$

wie schon oben angegeben, r^{r-1} nach dem Modul r incongruente Lösungen besitzt, dass aber auch eine jede der $r-1$ aus der Congruenz:

$$2x^{(1)} + 2x^{(2)} + \ldots + 2x^{(r)} \equiv \rho \pmod{r}$$

für $\rho = 1, 2, \ldots, r-1$ hervorgehenden Congruenzen r^{r-1} nach dem Modul r incongruente Lösungen hat, welche in jedem Falle aus einer beliebigen unter ihnen erhalten werden können, indem man zu derselben der Reihe nach die r^{r-1} Lösungen der Congruenz:

$$2x^{(1)} + 2x^{(2)} + \ldots + 2x^{(r)} \equiv 0 \pmod{r}$$

addirt und die dabei auftretenden Zahlen auf ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul r reducirt, so erkennt man, dass von den r^r an Stelle einer jeden der $2p$ Grössen $A_1, \ldots, A_p, B_1, \ldots, B_p$ auftretenden ganzen Zahlen r^{r-1} der Zahl 0, r^{r-1} der Zahl $1, \ldots,$ endlich r^{r-1} der Zahl $r-1$ congruent sind nach dem Modul r. Dieses Resultat kann man aber, wenn man zwei Charakteristiken, deren entsprechende Elemente sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, congruent nennt, auch dahin aussprechen, dass die Charakteristik:

$$\left|\begin{matrix} \frac{A}{r} \\ \frac{B}{r} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} \frac{A_1}{r} & \cdots & \frac{A_p}{r} \\ \frac{B_1}{r} & \cdots & \frac{B_p}{r} \end{matrix}\right|$$

bei der Ausführung der Summation $(r^{r-1})^{2p}$-mal einer jeden derjenigen r^{2p} speciellen Charakteristiken congruent wird, welche aus

$$\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{r} \\ \frac{\varepsilon'}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1}{r} \dots \frac{\varepsilon_p}{r} \\ \frac{\varepsilon'_1}{r} \dots \frac{\varepsilon'_p}{r} \end{bmatrix}$$

hervorgehen, wenn man darin an Stelle des Systems der $2p$ Buchstaben $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_p$ der Reihe nach die sämmtlichen Variationen der Elemente $0, 1, \dots, r-1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung treten lässt, und welche in der Folge Normalcharakteristiken genannt werden sollen. Nun ändert aber das auf der rechten Seite der obigen Thetaformel hinter dem Summenzeichen stehende Thetaproduct, wie aus den früher aufgestellten Hülfsformeln folgt, seinen Werth nicht, wenn man die Charakteristik $\begin{bmatrix} \frac{A}{r} \\ \frac{B}{r} \end{bmatrix}$ durch eine ihr congruente ersetzt, und da auch die hinter dem Thetaproducte stehende Exponentialgrösse, weil $r-1$ eine gerade Zahl ist, ungeändert bleibt, wenn man die $2p$ Zahlen A, B um ganze Vielfache von r ändert, so kann man die Summe von r^{2rp} Gliedern, welche die rechte Seite der in Rede stehenden Formel bildet, durch das $(r^{r-1})^{2p}$-fache derjenigen Summe ersetzen, die entsteht, wenn man in dem Ausdrucke:

$$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{r} \\ \frac{\varepsilon'}{r} \end{bmatrix}((rv^{(1)})) \dots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{r} \\ \frac{\varepsilon'}{r} \end{bmatrix}((rv^{(r)}))\, e^{\frac{r-1}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu \pi i}$$

an Stelle des Systems der $2p$ Buchstaben $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_p$ der Reihe nach die sämmtlichen Variationen der Elemente $0, 1, \dots, r-1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung treten lässt und die Summe der so entstehenden r^{2p} Terme bildet. Dividirt man dann noch linke und rechte Seite der auf diese Weise entstandenen Formel durch $(r^{r-1})^{2p} = r^{(2r-2)p}$, so

erhält man schliesslich die dem Systeme (O_1) entsprechende Thetaformel in der einfachen Gestalt:

$$(\theta_1) \qquad r^p \vartheta(\!(ru^{(1)})\!) \dots \vartheta(\!(ru^{(r)})\!) = \sum_{\substack{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_p}}^{0,1,\dots,r-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{r} \\ \frac{\varepsilon'}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(1)})\!) \dots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{r} \\ \frac{\varepsilon'}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(r)})\!) e^{\frac{r-1}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu \pi i},$$

bei der also r eine ungerade Zahl bezeichnet, die auf der rechten Seite angedeutete Summation in der Weise auszuführen ist, dass an Stelle der Charakteristik $\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{r} \\ \frac{\varepsilon'}{r} \end{bmatrix}$ der Reihe nach die sämmtlichen r^{2p} Normalcharakteristiken treten, endlich die Grössen u die durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} ru_\mu^{(1)} &= (2-r)v_\mu^{(1)} + 2v_\mu^{(2)} + \dots + 2v_\mu^{(r)}, \\ ru_\mu^{(2)} &= 2v_\mu^{(1)} + (2-r)v_\mu^{(2)} + \dots + 2v_\mu^{(r)}, \qquad (\mu=1,2,\dots,p) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ ru_\mu^{(r)} &= 2v_\mu^{(1)} + 2v_\mu^{(2)} + \dots + (2-r)v_\mu^{(r)}, \end{aligned}$$

definirten linearen Functionen der als unabhängige Veränderliche anzusehenden Grössen v bezeichnen.

Lässt man auf der rechten Seite der gewonnenen Formel (θ_1), indem man unter $\eta_1, \dots, \eta_p, \eta'_1, \dots, \eta'_p$ beliebige ganze Zahlen versteht, die Systeme:

$$(rv^{(1)}), \dots, (rv^{(r)}) \text{ übergehen in } \left(rv^{(1)} + \begin{vmatrix} \frac{\eta}{r} \\ \frac{\eta'}{r} \end{vmatrix}\right), \dots, \left(rv^{(r)} + \begin{vmatrix} \frac{\eta}{r} \\ \frac{\eta'}{r} \end{vmatrix}\right),$$

so gehen dadurch gleichzeitig die auf der linken Seite stehenden Systeme:

$$(ru^{(1)}), \dots, (ru^{(r)}) \quad \text{über in} \quad \left(ru^{(1)} + \begin{vmatrix} \frac{\eta}{r} \\ \frac{\eta'}{r} \end{vmatrix}\right), \dots, \left(ru^{(r)} + \begin{vmatrix} \frac{\eta}{r} \\ \frac{\eta'}{r} \end{vmatrix}\right),$$

und man erhält, wenn man die, in der Formel (A) der vorhergehenden Arbeit als specielle Fälle enthaltenen, Formeln:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon}{r}\\ \frac{\varepsilon'}{r}\end{bmatrix}\left(\!\!\left(rv^{(\nu)} + \begin{vmatrix}\frac{\eta}{r}\\ \frac{\eta'}{r}\end{vmatrix}\right)\!\!\right)$$

$$= \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon+\eta}{r}\\ \frac{\varepsilon'+\eta'}{r}\end{bmatrix}((rv^{(\nu)}))\, e^{-\frac{1}{r^2}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\eta_\mu\eta_{\mu'} - \frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\eta_\mu\left(rv_\mu^{(\nu)} + \frac{\varepsilon'_\mu}{r}\pi i + \frac{\eta'_\mu}{r}\pi i\right)},$$

$$(\nu=1,2,\ldots,r)$$

$$\vartheta\left(\!\!\left(ru^{(\nu)} + \begin{vmatrix}\frac{\eta}{r}\\ \frac{\eta'}{r}\end{vmatrix}\right)\!\!\right)$$

$$= \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\eta}{r}\\ \frac{\eta'}{r}\end{bmatrix}((ru^{(\nu)}))\, e^{-\frac{1}{r^2}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\eta_\mu\eta_{\mu'} - \frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\eta_\mu\left(ru_\mu^{(\nu)} + \frac{\eta'_\mu}{r}\pi i\right)}$$

anwendet und unter Berücksichtigung der Relation:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=r} u_\mu^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=r} v_\mu^{(\nu)} \qquad (\mu=1,2,\ldots,p)$$

die den beiden Seiten gemeinsamen Exponentialfactoren durch Division entfernt, zunächst:

$$r^p\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\eta}{r}\\ \frac{\eta'}{r}\end{bmatrix}((ru^{(1)}))\ \ldots\ \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\eta}{r}\\ \frac{\eta'}{r}\end{bmatrix}((ru^{(r)}))$$

$$= \sum_{\substack{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_p}}^{0,1,\ldots,r-1} \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon+\eta}{r}\\ \frac{\varepsilon'+\eta'}{r}\end{bmatrix}((rv^{(1)}))\ \ldots\ \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon+\eta}{r}\\ \frac{\varepsilon'+\eta'}{r}\end{bmatrix}((rv^{(r)}))\, e^{\frac{r-1}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varepsilon_\mu\varepsilon'_\mu\pi i - \frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\eta_\mu\varepsilon'_\mu\pi i}.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung setze man nun für jedes μ von 1 bis p:

$$\varepsilon_\mu = \dot{\varepsilon}_\mu - \eta_\mu, \qquad \varepsilon'_\mu = \dot{\varepsilon}'_\mu - \eta'_\mu;$$

es geht dann das hinter dem Summenzeichen stehende allgemeine Glied über in:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\dot\varepsilon}{r}\\ \frac{\dot\varepsilon'}{r}\end{bmatrix}(\!(rv^{(1)})\!)\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\dot\varepsilon}{r}\\ \frac{\dot\varepsilon'}{r}\end{bmatrix}(\!(rv^{(r)})\!)\,e^{\frac{r-1}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\dot\varepsilon_\mu\dot\varepsilon'_\mu\pi i}\cdot e^{-\frac{r-1}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\eta_\mu\eta'_\mu\pi i}\cdot e^{\frac{r-1}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\eta_\mu\dot\varepsilon'_\mu-\eta'_\mu\dot\varepsilon_\mu)\pi i},$$

und da bei der Ausführung der Summation die Charakteristik $\begin{bmatrix}\frac{\dot\varepsilon}{r}\\ \frac{\dot\varepsilon'}{r}\end{bmatrix}$ ein und nur ein Mal einer jeden der r^{2p} Normalcharakteristiken congruent wird, weiter auch das soeben angeschriebene allgemeine Glied der Summe sich nicht ändert, wenn man die Zahlen $\dot\varepsilon_1, \ldots, \dot\varepsilon_p, \dot\varepsilon'_1, \ldots, \dot\varepsilon'_p$ durch irgend welche ihnen nach dem Modul r congruente, speciell also durch ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul r ersetzt, so kann die Summation in Bezug auf die Grössen $\dot\varepsilon$, $\dot\varepsilon'$ auch in der Weise ausgeführt werden, dass die Charakteristik $\begin{bmatrix}\frac{\dot\varepsilon}{r}\\ \frac{\dot\varepsilon'}{r}\end{bmatrix}$ die Reihe der r^{2p} Normalcharakteristiken durchläuft. Man gelangt so, wenn man schliesslich noch die Punkte bei den Buchstaben $\dot\varepsilon$, $\dot\varepsilon'$ unterdrückt, zu der Formel:

$$(\theta_1')\qquad r^p\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\eta}{r}\\ \frac{\eta'}{r}\end{bmatrix}(\!(ru^{(1)})\!)\;\ldots\;\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\eta}{r}\\ \frac{\eta'}{r}\end{bmatrix}(\!(ru^{(r)})\!)\,e^{\frac{r-1}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\eta_\mu\eta'_\mu\pi i}$$

$$=\sum_{\substack{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_p}}^{0,1,\ldots,r-1} e^{\frac{r-1}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\eta_\mu\varepsilon'_\mu-\eta'_\mu\varepsilon_\mu)\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon}{r}\\ \frac{\varepsilon'}{r}\end{bmatrix}(\!(rv^{(1)})\!)\;\ldots\;\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon}{r}\\ \frac{\varepsilon'}{r}\end{bmatrix}(\!(rv^{(r)})\!)\,e^{\frac{r-1}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varepsilon_\mu\varepsilon'_\mu\pi i}.$$

Lässt man jetzt weiter, indem man unter $\rho_\mu^{(\nu)}, \rho_\mu'^{(\nu)}, {}_{\nu=1,2,\ldots,r}^{\mu=1,2,\ldots,p}$, $2rp$ ganze Zahlen versteht, welche für jedes μ von 1 bis p den Bedingungen:

$$\rho_\mu^{(1)}+\rho_\mu^{(2)}+\cdots+\rho_\mu^{(r)}=0,\qquad \rho_\mu'^{(1)}+\rho_\mu'^{(2)}+\cdots+\rho_\mu'^{(r)}=0$$

genügen, auf der rechten Seite der letzten Formel die Systeme:

$$(rv^{(1)}),\ \ldots,\ (rv^{(r)}) \text{ übergehen in } \left(rv^{(1)} + \left|\begin{matrix}\frac{\rho^{(1)}}{r}\\ \frac{\rho'^{(1)}}{r}\end{matrix}\right|\right),\ \ldots,\ \left(rv^{(r)} + \left|\begin{matrix}\frac{\rho^{(r)}}{r}\\ \frac{\rho'^{(r)}}{r}\end{matrix}\right|\right),$$

so gehen dadurch gleichzeitig die auf der linken Seite stehenden Systeme:

$$(ru^{(1)}),\ \ldots,\ (ru^{(r)}) \quad \text{über in} \quad \left(ru^{(1)} - \left|\begin{matrix}\frac{\rho^{(1)}}{r}\\ \frac{\rho'^{(1)}}{r}\end{matrix}\right|\right),\ \ldots,\ \left(ru^{(r)} - \left|\begin{matrix}\frac{\rho^{(r)}}{r}\\ \frac{\rho'^{(r)}}{r}\end{matrix}\right|\right),$$

und man erhält, indem man die Formeln:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon}{r}\\ \frac{\varepsilon'}{r}\end{bmatrix}\left(\!\!\left(rv^{(\nu)} + \left|\begin{matrix}\frac{\rho^{(\nu)}}{r}\\ \frac{\rho'^{(\nu)}}{r}\end{matrix}\right|\right)\!\!\right)$$

$$= \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon+\rho^{(\nu)}}{r}\\ \frac{\varepsilon'+\rho'^{(\nu)}}{r}\end{bmatrix}(\!(rv^{(\nu)})\!)\, e^{-\frac{1}{r^2}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\rho_\mu^{(\nu)}\rho_{\mu'}^{(\nu)} - \frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\rho_\mu^{(\nu)}\left(rv_\mu^{(\nu)} + \frac{\varepsilon'_\mu}{r}\pi i + \frac{\rho'^{(\nu)}_\mu}{r}\pi i\right)},$$

$$(\nu=1,2,\ldots,r)$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\eta}{r}\\ \frac{\eta'}{r}\end{bmatrix}\left(\!\!\left(ru^{(\nu)} - \left|\begin{matrix}\frac{\rho^{(\nu)}}{r}\\ \frac{\rho'^{(\nu)}}{r}\end{matrix}\right|\right)\!\!\right)$$

$$= \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\eta-\rho^{(\nu)}}{r}\\ \frac{\eta'-\rho'^{(\nu)}}{r}\end{bmatrix}(\!(ru^{(\nu)})\!)\, e^{-\frac{1}{r^2}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\rho_\mu^{(\nu)}\rho_{\mu'}^{(\nu)} + \frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\rho_\mu^{(\nu)}\left(ru_\mu^{(\nu)} + \frac{\eta'_\mu}{r}\pi i - \frac{\rho'^{(\nu)}_\mu}{r}\pi i\right)},$$

anwendet und unter Berücksichtigung der Relation:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=r}\rho_\mu^{(\nu)}u_\mu^{(\nu)} = -\sum_{\nu=1}^{\nu=r}\rho_\mu^{(\nu)}v_\mu^{(\nu)} \qquad (\mu=1,2,\ldots,p)$$

die den beiden Seiten gemeinsamen Exponentialfactoren durch Division entfernt, schliesslich die Formel:

$$(\theta_1'') \qquad r^p \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\eta-\rho^{(1)}}{r}\\ \frac{\eta'-\rho'^{(1)}}{r}\end{bmatrix}((ru^{(1)}))\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\eta-\rho^{(r)}}{r}\\ \frac{\eta'-\rho'^{(r)}}{r}\end{bmatrix}((ru^{(r)}))e^{\frac{r-1}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\eta_\mu\eta'_\mu\pi i} =$$

$$\sum_{\substack{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_p}}^{0,1,\ldots,r-1} e^{\frac{r-1}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\eta_\mu\varepsilon'_\mu-\eta'_\mu\varepsilon_\mu)\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon+\rho^{(1)}}{r}\\ \frac{\varepsilon'+\rho'^{(1)}}{r}\end{bmatrix}((rv^{(1)}))\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon+\rho^{(r)}}{r}\\ \frac{\varepsilon'+\rho'^{(r)}}{r}\end{bmatrix}((rv^{(r)}))e^{\frac{r-1}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varepsilon_\mu\varepsilon'_\mu\pi i}.$$

Diese Formel umfasst die Formeln (θ_1), (θ_1') als specielle Fälle und ist zugleich die allgemeinste derartige Formel.

Die Formeln (θ_1), (θ_1'), (θ_1'') entsprechen beziehlich den Formeln (θ), (θ'), (θ'') der vorhergehenden Arbeit, und es hätte, ebenso wie (θ_1) aus (θ) abgeleitet wurde, auch (θ_1') aus (θ'), (θ_1'') aus (θ'') direct abgeleitet werden können; nachdem aber einmal die Formel (θ_1) gewonnen war, erschien das hier zur Herstellung der Formeln (θ_1'), (θ_1'') eingeschlagene Verfahren als das einfachere.

Setzt man in der Formel (θ_1''):

$$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon+\rho^{(1)}}{r}\\ \frac{\varepsilon'+\rho'^{(1)}}{r}\end{bmatrix}((rv^{(1)}))\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon+\rho^{(r)}}{r}\\ \frac{\varepsilon'+\rho'^{(r)}}{r}\end{bmatrix}((rv^{(r)}))e^{\frac{r-1}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varepsilon_\mu\varepsilon'_\mu\pi i} = x_{[\varepsilon]},$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\eta-\rho^{(1)}}{r}\\ \frac{\eta'-\rho'^{(1)}}{r}\end{bmatrix}((ru^{(1)}))\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\eta-\rho^{(r)}}{r}\\ \frac{\eta'-\rho'^{(r)}}{r}\end{bmatrix}((ru^{(r)}))e^{\frac{r-1}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\eta_\mu\eta'_\mu\pi i} = x'_{[\eta]},$$

wobei die den Buchstaben x, x' beigefügten Zeichen $[\varepsilon]$, $[\eta]$ die Complexe $\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \ldots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\eta_1 & \ldots & \eta_p\\ \eta'_1 & \ldots & \eta'_p\end{bmatrix}$ beziehlich vertreten sollen, und setzt zugleich, indem man zur Abkürzung $e^{\frac{r-1}{r}\pi i}$ mit τ, $\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\eta_\mu\varepsilon'_\mu - \eta'_\mu\varepsilon_\mu)$ mit $[\eta][\varepsilon]$ bezeichnet:

$$e^{\frac{r-1}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\eta_\mu \varepsilon'_\mu - \eta'_\mu \varepsilon_\mu)\pi i} = \tau^{[\eta]|[\varepsilon]},$$

so entsteht aus der genannten Formel die Gleichung:

$$r^p x'_{[\eta]} = \sum_{[\varepsilon]} \tau^{[\eta]|[\varepsilon]} x_{[\varepsilon]},$$

und es ist dabei die auf der rechten Seite angedeutete Summation über alle Terme zu erstrecken, die aus dem allgemeinen Gliede hervorgehen, indem man darin an Stelle des Systems der $2p$ in $[\varepsilon]$ vorkommenden Buchstaben $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_p$ der Reihe nach die sämmtlichen r^{2p} Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, r-1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung treten lässt. Die letzte Gleichung umfasst, da das mit $x'_{[\eta]}$ bezeichnete Thetaproduct ungeändert bleibt, wenn man die Grössen $\eta_1, \ldots, \eta_p, \eta'_1, \ldots, \eta'_p$ um ganze Vielfache von r ändert, im Ganzen nur r^{2p} verschiedene specielle Gleichungen; man erhält dieselben, wenn man an Stelle des Systems der $2p$ in $[\eta]$ vorkommenden Buchstaben $\eta_1, \ldots, \eta_p, \eta'_1, \ldots, \eta'_p$ der Reihe nach die r^{2p} soeben angeführten Variationen setzt. Das auf diese Weise entstehende System von r^{2p} linearen Gleichungen, dem man durch passend gewählte Anordnung eine übersichtliche Gestalt verleihen kann, lässt sich für die Untersuchung der aus der Formel (Θ''_1) entspringenden Relationen zwischen Thetafunctionen mit Vortheil verwenden.

3.

Es soll jetzt die dem Systeme (O_2) entsprechende Thetaformel aufgestellt werden. Bezeichnet man in diesem Systeme die Zahl ν wieder mit r, so nimmt dasselbe die Gestalt an:

$$(O_2)\qquad \begin{array}{l} (1-r)x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(2r)} = ry^{(1)}, \\ x^{(1)} + (1-r)x^{(2)} + \ldots + x^{(2r)} = ry^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + (1-r)x^{(2r)} = ry^{(2r)}. \end{array}$$

Lässt man nun das in der vorhergehenden Arbeit zu Grunde gelegte, allgemeine orthogonale System (O) in das soeben aufgestellte specielle System (O_2) übergehen, indem man berücksichtigt, dass bei diesem letzteren $n = 2r$ ist, so geht zugleich die dort aufgestellte, dem Systeme (O) entsprechende Thetaformel (θ) in die dem Systeme (O_2) entsprechende über, und man erhält dadurch diese letztere in der Gestalt:

$$(r^{2r}s)^p \vartheta((ru^{(1)})) \ldots \vartheta((ru^{(2r)})) = \sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,r-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(1)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(1)}}{r} \end{bmatrix}((rv^{(1)})) \ldots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(2r)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(2r)}}{r} \end{bmatrix}((rv^{(2r)})),$$

wobei die Grössen u lineare Functionen der als unabhängige Veränderliche anzusehenden Grössen v bezeichnen, definirt durch die p Gleichungensysteme:

$$\begin{aligned}
ru_\mu^{(1)} &= (1-r)v_\mu^{(1)} + v_\mu^{(2)} + \ldots + v_\mu^{(2r)}, \\
ru_\mu^{(2)} &= v_\mu^{(1)} + (1-r)v_\mu^{(2)} + \ldots + v_\mu^{(2r)}, \qquad (\mu=1,2,\ldots,p) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
ru_\mu^{(2r)} &= v_\mu^{(1)} + v_\mu^{(2)} + \ldots + (1-r)v_\mu^{(2r)};
\end{aligned}$$

wobei ferner für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}_\mu^{(1)} &= (1-r)\alpha_\mu^{(1)} + \alpha_\mu^{(2)} + \ldots + \alpha_\mu^{(2r)}, \\
\bar{\alpha}_\mu^{(2)} &= \alpha_\mu^{(1)} + (1-r)\alpha_\mu^{(2)} + \ldots + \alpha_\mu^{(2r)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\bar{\alpha}_\mu^{(2r)} &= \alpha_\mu^{(1)} + \alpha_\mu^{(2)} + \ldots + (1-r)\alpha_\mu^{(2r)}, \\
\bar{\beta}_\mu^{(1)} &= (1-r)\beta_\mu^{(1)} + \beta_\mu^{(2)} + \ldots + \beta_\mu^{(2r)}, \\
\bar{\beta}_\mu^{(2)} &= \beta_\mu^{(1)} + (1-r)\beta_\mu^{(2)} + \ldots + \beta_\mu^{(2r)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\bar{\beta}_\mu^{(2r)} &= \beta_\mu^{(1)} + \beta_\mu^{(2)} + \ldots + (1-r)\beta_\mu^{(2r)},
\end{aligned}$$

und die Summation auf der rechten Seite in der Weise auszuführen ist, dass jede der $2rp$ Grössen α, wie auch jede der $2rp$ Grössen β unabhängig

von den anderen die Werthe $0, 1, \ldots, r-1$ durchläuft; wobei endlich s die noch zu bestimmende Anzahl der nach dem Modul r incongruenten oder, was auf dasselbe hinauskommt, der ausschliesslich von Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, r-1$ als Elementen gebildeten Lösungen des Congruenzensystems:

$$\begin{array}{l} (1-r)x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(2r)} \equiv 0 \pmod{r}, \\ x^{(1)} + (1-r)x^{(2)} + \ldots + x^{(2r)} \equiv 0 \pmod{r}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + (1-r)x^{(2r)} \equiv 0 \pmod{r}, \end{array}$$

bezeichnet.

Um den Werth der Zahl s zu bestimmen, berücksichtige man, dass die $2r$ Formen, welche die linken Seiten der soeben aufgestellten Congruenzen bilden, in früher angegebenem Sinne einander congruent sind nach dem Modul r, und dass in Folge dessen die Lösungen des Congruenzensystems identisch sind mit den Lösungen einer einzigen der in ihm enthaltenen Congruenzen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, mit den Lösungen der Congruenz:

$$x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(2r)} \equiv 0 \pmod{r}.$$

Diese Congruenz besitzt aber r^{2r-1} nach dem Modul r incongruente Lösungen; man erhält dieselben, wenn man in den Gleichungen:

$$x^{(1)} = \xi^{(1)}, \quad x^{(2)} = \xi^{(2)}, \ldots, x^{(2r-1)} = \xi^{(2r-1)}, \quad x^{(2r)} = \xi^{(2r)}$$

an Stelle des Systems der $2r-1$ Zahlen $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(2r-1)}$ der Reihe nach die sämmtlichen r^{2r-1} Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, r-1$ zur $(2r-1)^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung treten lässt und jedesmal dann für $\xi^{(2r)}$ diejenige einzige Zahl aus der Reihe $0, 1, \ldots, r-1$ setzt, welche der Congruenz:

$$\xi^{(2r)} \equiv -\xi^{(1)} - \xi^{(2)} - \ldots - \xi^{(2r-1)} \pmod{r}$$

genügt. Es ist demnach $s = r^{2r-1}$.

Die auf der rechten Seite der aufgestellten Thetaformel bei Aus-

führung der Summation auftretenden r^{4rp} Thetaproducte können mit Hülfe der Relationen:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_\mu + 1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_\mu \dots h_p \end{bmatrix}(\!(v)\!) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_\mu \dots g_p \\ h_1 \dots h_\mu \dots h_p \end{bmatrix}(\!(v)\!),$$

$$(\mu = 1, 2, \dots, p)$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_\mu \dots g_p \\ h_1 \dots h_\mu + 1 \dots h_p \end{bmatrix}(\!(v)\!) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_\mu \dots g_p \\ h_1 \dots h_\mu \dots h_p \end{bmatrix}(\!(v)\!)e^{2g_\mu \pi i}$$

auf eine geringere Anzahl reducirt werden. Zu dem Ende setze man für $\mu = 1, 2, \dots, p$:

$$\alpha_\mu^{(1)} + \alpha_\mu^{(2)} + \dots + \alpha_\mu^{(2r)} = A_\mu,$$

$$\beta_\mu^{(1)} + \beta_\mu^{(2)} + \dots + \beta_\mu^{(2r)} = B_\mu,$$

und bringe die Grössen $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ in die Form:

$$\bar{\alpha}_\mu^{(1)} = A_\mu - r\alpha_\mu^{(1)}, \quad \bar{\alpha}_\mu^{(2)} = A_\mu - r\alpha_\mu^{(2)}, \dots, \bar{\alpha}_\mu^{(2r)} = A_\mu - r\alpha_\mu^{(2r)},$$

$$\bar{\beta}_\mu^{(1)} = B_\mu - r\beta_\mu^{(1)}, \quad \bar{\beta}_\mu^{(2)} = B_\mu - r\beta_\mu^{(2)}, \dots, \bar{\beta}_\mu^{(2r)} = B_\mu - r\beta_\mu^{(2r)}.$$

Unter Benutzung der soeben angeschriebenen Hülfsformeln erhält man dann die Relation:

$$\vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\bar{\alpha}^{(\nu)}}{r} \\ \dfrac{\bar{\beta}^{(\nu)}}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(\nu)})\!) = \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{A}{r} - \alpha^{(\nu)} \\ \dfrac{B}{r} - \beta^{(\nu)} \end{bmatrix}(\!(rv^{(\nu)})\!) = \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{A}{r} \\ \dfrac{B}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(\nu)})\!)\, e^{-\frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} A_\mu \beta_\mu^{(\nu)} \pi i},$$

für $\nu = 1, 2, \dots, 2r$, und weiter, da für $\mu = 1, 2, \dots, p$:

$$\beta_\mu^{(1)} + \beta_\mu^{(2)} + \dots + \beta_\mu^{(2r)} = B_\mu$$

ist, die Gleichung:

$$\vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\bar{\alpha}^{(1)}}{r} \\ \dfrac{\bar{\beta}^{(1)}}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(1)})\!) \dots \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\bar{\alpha}^{(2r)}}{r} \\ \dfrac{\bar{\beta}^{(2r)}}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(2r)})\!) = \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{A}{r} \\ \dfrac{B}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(1)})\!) \dots \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{A}{r} \\ \dfrac{B}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(2r)})\!)\, e^{-\frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} A_\mu B_\mu \pi i}.$$

Dabei ist, wie es bisher stets geschehen, durchgehends eine Charakteristik von der Form $\begin{bmatrix} g_1 & \dots & g_p \\ h_1 & \dots & h_p \end{bmatrix}$ abgekürzt durch $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ bezeichnet. Auf Grund der letzten Gleichung nimmt nun die aufgestellte Thetaformel, wenn man darin noch an Stelle von s den dafür gefundenen Werth r^{2r-1} einführt, zunächst die Gestalt an:

$$r^{(4r-1)p}\vartheta((ru^{(1)}))\dots\vartheta((ru^{(2r)})) = \sum_{\alpha,\,\beta}^{0,1,\dots,r-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{A}{r} \\ \frac{B}{r} \end{bmatrix}((rv^{(1)}))\dots\vartheta\begin{bmatrix} \frac{A}{r} \\ \frac{B}{r} \end{bmatrix}((rv^{(2r)}))\, e^{-\frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} A_\mu B_\mu \pi i}.$$

Bei der Ausführung der auf der rechten Seite dieser Formel angedeuteten Summation durchläuft jede der $2p$, in der Charakteristik:

$$\begin{bmatrix} \frac{A}{r} \\ \frac{B}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_1}{r} \dots \frac{A_p}{r} \\ \frac{B_1}{r} \dots \frac{B_p}{r} \end{bmatrix}$$

sowie in dem hinter dem Thetaproducte stehenden Exponentialfactor vorkommenden, Grössen $A_1, \dots, A_p$, $B_1, \dots, B_p$ unabhängig von den anderen die Reihe der r^{2r} ganzen Zahlen, die aus:

$$x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(2r)}$$

hervorgehen, wenn man an Stelle des Systems der $2r$ Grössen $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(2r)}$ der Reihe nach die sämmtlichen Variationen der Elemente $0, 1, \dots, r-1$ zur $2r^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung treten lässt. Berücksichtigt man nun, dass die Congruenz:

$$x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(2r)} \equiv 0 \pmod r,$$

wie schon oben angegeben, r^{2r-1} nach dem Modul r incongruente Lösungen besitzt, dass aber auch eine jede der $r-1$ aus der Congruenz:

$$x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(2r)} \equiv \rho \pmod r$$

für $\rho = 1, 2, \dots, r-1$ hervorgehenden Congruenzen r^{2r-1} nach dem

Modul r incongruente Lösungen hat, welche in jedem Falle aus einer beliebigen unter ihnen erhalten werden können, indem man zu derselben der Reihe nach die r^{2r-1} Lösungen der Congruenz:

$$x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(2r)} \equiv 0 \pmod r$$

addirt und die dabei auftretenden Zahlen auf ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul r reducirt, so erkennt man, dass von den r^{2r} an Stelle einer jeden der $2p$ Grössen $A_1, \ldots, A_p, B_1, \ldots, B_p$ auftretenden ganzen Zahlen r^{2r-1} der Zahl 0, r^{2r-1} der Zahl $1, \ldots, r^{2r-1}$ der Zahl $r-1$ congruent sind nach dem Modul r. Dieses Resultat kann man aber, wenn man zwei Charakteristiken, deren entsprechende Elemente sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, congruent nennt, auch dahin aussprechen, dass die Charakteristik:

$$\begin{bmatrix} \frac{A}{r} \\ \frac{B}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_1}{r} \cdots \frac{A_p}{r} \\ \frac{B_1}{r} \cdots \frac{B_p}{r} \end{bmatrix}$$

bei der Ausführung der Summation $(r^{2r-1})^{2p}$-mal einer jeden derjenigen r^{2p} speciellen Charakteristiken congruent wird, welche aus:

$$\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{r} \\ \frac{\varepsilon'}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1}{r} \cdots \frac{\varepsilon_p}{r} \\ \frac{\varepsilon'_1}{r} \cdots \frac{\varepsilon'_p}{r} \end{bmatrix}$$

hervorgehen, wenn man darin an Stelle des Systems der $2p$ Buchstaben $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_p$ der Reihe nach die sämmtlichen Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, r-1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung treten lässt, und welche in der Folge Normalcharakteristiken genannt werden sollen. Nun ändert aber das auf der rechten Seite der obigen Thetaformel hinter dem Summenzeichen stehende Thetaproduct, wie aus den früher aufgestellten Hülfsformeln folgt, seinen Werth nicht, wenn man die Charakteristik $\begin{bmatrix} \frac{A}{r} \\ \frac{B}{r} \end{bmatrix}$ durch eine ihr congruente ersetzt, und da auch die hinter dem Thetaproducte stehende Exponentialgrösse ungeändert bleibt, wenn man die $2p$

Zahlen A, B um ganze Vielfache von r ändert, so kann man die Summe von r^{4rp} Gliedern, welche die rechte Seite der in Rede stehenden Formel bildet, durch das $(r^{2r-1})^{2p}$-fache derjenigen Summe ersetzen, die entsteht, wenn man in dem Ausdrucke:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon}{r}\\ \frac{\varepsilon'}{r}\end{bmatrix}(\!(rv^{(1)})\!) \ldots \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon}{r}\\ \frac{\varepsilon'}{r}\end{bmatrix}(\!(rv^{(2r)})\!)\, e^{-\frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varepsilon_\mu\varepsilon'_\mu\pi i}$$

an Stelle des Systems der $2p$ Buchstaben $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$, $\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_p$ der Reihe nach die sämmtlichen Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, r-1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung treten lässt und die Summe der so entstehenden r^{2p} Terme bildet. Dividirt man dann noch linke und rechte Seite der auf diese Weise entstandenen Formel durch $(r^{2r-1})^{2p} = r^{(4r-2)p}$, so erhält man schliesslich die dem Systeme (O_2) entsprechende Thetaformel in der einfachen Gestalt:

$$(\theta_2) \quad r^p\vartheta(\!(ru^{(1)})\!) \ldots \vartheta(\!(ru^{(2r)})\!) = \sum_{\substack{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_p}}^{0,1,\ldots,r-1} \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon}{r}\\ \frac{\varepsilon'}{r}\end{bmatrix}(\!(rv^{(1)})\!) \ldots \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon}{r}\\ \frac{\varepsilon'}{r}\end{bmatrix}(\!(rv^{(2r)})\!)\, e^{-\frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varepsilon_\mu\varepsilon'_\mu\pi i},$$

bei der also r eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, die auf der rechten Seite angedeutete Summation in der Weise auszuführen ist, dass an Stelle der Charakteristik $\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon}{r}\\ \frac{\varepsilon'}{r}\end{bmatrix}$ der Reihe nach die sämmtlichen r^{2p} Normalcharakteristiken treten, endlich die Grössen u die durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
ru_\mu^{(1)} &= (1-r)v_\mu^{(1)} + v_\mu^{(2)} + \ldots + v_\mu^{(2r)},\\
ru_\mu^{(2)} &= v_\mu^{(1)} + (1-r)v_\mu^{(2)} + \ldots + v_\mu^{(2r)}, \qquad (\mu=1,2,\ldots,p)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
ru_\mu^{(2r)} &= v_\mu^{(1)} + v_\mu^{(2)} + \ldots + (1-r)v_\mu^{(2r)},
\end{aligned}$$

definirten linearen Functionen der als unabhängige Veränderliche anzusehenden Grössen v bezeichnen.

Lässt man auf der rechten Seite der gewonnenen Formel (θ_2), indem man unter $\eta_1, \ldots, \eta_p, \eta'_1, \ldots, \eta'_p$ beliebige ganze Zahlen versteht, die Systeme:

$$(rv^{(1)}), \ldots, (rv^{(2r)}) \text{ übergehen in } \left(rv^{(1)} + \left|\begin{matrix}\frac{\eta}{r}\\ \frac{\eta'}{r}\end{matrix}\right|\right), \ldots, \left(rv^{(2r)} + \left|\begin{matrix}\frac{\eta}{r}\\ \frac{\eta'}{r}\end{matrix}\right|\right),$$

so gehen dadurch gleichzeitig die auf der linken Seite stehenden Systeme:

$$(ru^{(1)}), \ldots, (ru^{(2r)}) \quad \text{über in} \quad \left(ru^{(1)} + \left|\begin{matrix}\frac{\eta}{r}\\ \frac{\eta'}{r}\end{matrix}\right|\right), \ldots, \left(ru^{(2r)} + \left|\begin{matrix}\frac{\eta}{r}\\ \frac{\eta'}{r}\end{matrix}\right|\right),$$

und man erhält, indem man die im vorhergehenden Artikel an der entsprechenden Stelle angeschriebenen Hülfsformeln für $\nu = 1, 2, \ldots, 2r$ anwendet und wieder unter Berücksichtigung der Relation:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=2r} u_\mu^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=2r} v_\mu^{(\nu)} \qquad {\scriptstyle (\mu=1,2,\ldots,p)}$$

die den beiden Seiten gemeinsamen Exponentialfactoren durch Division entfernt, zunächst:

$$r^p \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\eta}{r}\\ \frac{\eta'}{r}\end{bmatrix}(\!(ru^{(1)})\!) \ldots \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\eta}{r}\\ \frac{\eta'}{r}\end{bmatrix}(\!(ru^{(2r)})\!)$$

$$= \sum_{\substack{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_p}}^{0,1,\ldots,r-1} \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon+\eta}{r}\\ \frac{\varepsilon'+\eta'}{r}\end{bmatrix}(\!(rv^{(1)})\!) \ldots \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon+\eta}{r}\\ \frac{\varepsilon'+\eta'}{r}\end{bmatrix}(\!(rv^{(2r)})\!)\, e^{-\frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varepsilon_\mu\varepsilon'_\mu\pi i - \frac{4}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\eta_\mu\varepsilon'_\mu\pi i}.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung setze man nun für jedes μ von 1 bis p:

$$\varepsilon_\mu = \dot{\varepsilon}_\mu - \eta_\mu, \qquad \varepsilon'_\mu = \dot{\varepsilon}'_\mu - \eta'_\mu;$$

es geht dann das hinter dem Summenzeichen stehende allgemeine Glied über in:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\dot\varepsilon}{r}\\ \frac{\dot\varepsilon'}{r}\end{bmatrix}((rv^{(1)}))\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\dot\varepsilon}{r}\\ \frac{\dot\varepsilon'}{r}\end{bmatrix}((rv^{(2r)}))\,e^{-\frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\dot\varepsilon_\mu\dot\varepsilon'_\mu\pi i}\cdot e^{\frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\eta_\mu\eta'_\mu\pi i}\cdot e^{-\frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\eta_\mu\dot\varepsilon'_\mu-\eta'_\mu\dot\varepsilon_\mu)\pi i},$$

und da bei der Ausführung der Summation die Charakteristik $\begin{bmatrix}\frac{\dot\varepsilon}{r}\\ \frac{\dot\varepsilon'}{r}\end{bmatrix}$ ein und nur ein Mal einer jeden der r^{2p} Normalcharakteristiken congruent wird, weiter auch das soeben angeschriebene allgemeine Glied der Summe sich nicht ändert, wenn man die Zahlen $\dot\varepsilon_1, \ldots, \dot\varepsilon_p, \dot\varepsilon'_1, \ldots, \dot\varepsilon'_p$ durch irgend welche ihnen nach dem Modul r congruente, speciell also durch ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul r ersetzt, so kann die Summation in Bezug auf die Grössen $\dot\varepsilon, \dot\varepsilon'$ auch in der Weise ausgeführt werden, dass die Charakteristik $\begin{bmatrix}\frac{\dot\varepsilon}{r}\\ \frac{\dot\varepsilon'}{r}\end{bmatrix}$ die Reihe der r^{2p} Normalcharakteristiken durchläuft. Man gelangt so, wenn man schliesslich noch die Punkte bei den Buchstaben $\dot\varepsilon, \dot\varepsilon'$ unterdrückt, zu der Formel:

$$(\theta'_2)\qquad r^p\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\eta}{r}\\ \frac{\eta'}{r}\end{bmatrix}((ru^{(1)}))\ \ldots\ \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\eta}{r}\\ \frac{\eta'}{r}\end{bmatrix}((ru^{(2r)}))\,e^{-\frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\eta_\mu\eta'_\mu\pi i}$$

$$=\sum_{\substack{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_p}}^{0,1,\ldots,r-1} e^{-\frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\eta_\mu\varepsilon'_\mu-\eta'_\mu\varepsilon_\mu)\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon}{r}\\ \frac{\varepsilon'}{r}\end{bmatrix}((rv^{(1)}))\ \ldots\ \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon}{r}\\ \frac{\varepsilon'}{r}\end{bmatrix}((rv^{(2r)}))\,e^{-\frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varepsilon_\mu\varepsilon'_\mu\pi i}.$$

Lässt man jetzt weiter, indem man unter $\rho_\mu^{(\nu)}, \rho_\mu'^{(\nu)}, {}^{\mu=1,2,\ldots,p}_{\nu=1,2,\ldots,2r}$, $4rp$ ganze Zahlen versteht, welche für jedes μ von 1 bis p den Bedingungen:

$$\rho_\mu^{(1)}+\rho_\mu^{(2)}+\ldots+\rho_\mu^{(2r)}=0,\qquad \rho_\mu'^{(1)}+\rho_\mu'^{(2)}+\ldots+\rho_\mu'^{(2r)}=0$$

genügen, auf der rechten Seite der letzten Formel die Systeme:

$$(rv^{(1)}), \ldots, (rv^{(2r)}) \text{ übergehen in } \left(rv^{(1)} + \left| \begin{matrix} \frac{\rho^{(1)}}{r} \\ \frac{\rho'^{(1)}}{r} \end{matrix} \right| \right), \ldots, \left(rv^{(2r)} + \left| \begin{matrix} \frac{\rho^{(2r)}}{r} \\ \frac{\rho'^{(2r)}}{r} \end{matrix} \right| \right),$$

so gehen dadurch gleichzeitig die auf der linken Seite stehenden Systeme:

$$(ru^{(1)}), \ldots, (ru^{(2r)}) \quad \text{über in} \quad \left(ru^{(1)} - \left| \begin{matrix} \frac{\rho^{(1)}}{r} \\ \frac{\rho'^{(1)}}{r} \end{matrix} \right| \right), \ldots, \left(ru^{(2r)} - \left| \begin{matrix} \frac{\rho^{(2r)}}{r} \\ \frac{\rho'^{(2r)}}{r} \end{matrix} \right| \right),$$

und man erhält, indem man die im vorhergehenden Artikel an der entsprechenden Stelle angeschriebenen Hülfsformeln für $\nu = 1, 2, \ldots, 2r$ anwendet und wieder unter Berücksichtigung der Relation:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=2r} \rho_\mu^{(\nu)} u_\mu^{(\nu)} = - \sum_{\nu=1}^{\nu=2r} \rho_\mu^{(\nu)} v_\mu^{(\nu)} \qquad {\scriptstyle (\mu=1,2,\ldots,p)}$$

die den beiden Seiten gemeinsamen Exponentialfactoren durch Division entfernt, schliesslich die Formel:

$$(\theta_2'').\qquad r^p \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\eta - \rho^{(1)}}{r} \\ \frac{\eta' - \rho'^{(1)}}{r} \end{bmatrix} (\!(ru^{(1)})\!) \ldots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\eta - \rho^{(2r)}}{r} \\ \frac{\eta' - \rho'^{(2r)}}{r} \end{bmatrix} (\!(ru^{(2r)})\!)\, e^{-\frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \eta_\mu \eta'_\mu \pi i} =$$

$$\sum_{\substack{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_p}}^{0,1,\ldots,r-1} e^{-\frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(\eta_\mu \varepsilon'_\mu - \eta'_\mu \varepsilon_\mu\right)\pi i}\, \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon + \rho^{(1)}}{r} \\ \frac{\varepsilon' + \rho'^{(1)}}{r} \end{bmatrix} (\!(rv^{(1)})\!) \ldots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon + \rho^{(2r)}}{r} \\ \frac{\varepsilon' + \rho'^{(2r)}}{r} \end{bmatrix} (\!(rv^{(2r)})\!)\, e^{-\frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu \pi i}.$$

Diese Formel umfasst die Formeln (θ_2), (θ_2') als specielle Fälle und ist zugleich die allgemeinste derartige Formel.

Die Formeln (θ_2), (θ_2'), (θ_2'') entsprechen beziehlich den Formeln (θ), (θ'), (θ'') der vorhergehenden Arbeit, und es hätte, ebenso wie (θ_2) aus (θ) abgeleitet wurde, auch (θ_2') aus (θ'), (θ_2'') aus (θ'') direct abgeleitet werden können.

Setzt man in der Formel (θ_2''):

$$\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\varepsilon+\rho^{(1)}}{r}\\[2mm] \dfrac{\varepsilon'+\rho'^{(1)}}{r}\end{bmatrix}(\!(rv^{(1)})\!)\;\dots\;\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\varepsilon+\rho^{(2r)}}{r}\\[2mm] \dfrac{\varepsilon'+\rho'^{(2r)}}{r}\end{bmatrix}(\!(rv^{(2r)})\!)\,e^{-\frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varepsilon_\mu\varepsilon'_\mu\pi i}=x_{[\varepsilon]},$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\eta-\rho^{(1)}}{r}\\[2mm] \dfrac{\eta'-\rho'^{(1)}}{r}\end{bmatrix}(\!(ru^{(1)})\!)\;\dots\;\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\eta-\rho^{(2r)}}{r}\\[2mm] \dfrac{\eta'-\rho'^{(2r)}}{r}\end{bmatrix}(\!(ru^{(2r)})\!)\,e^{-\frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\eta_\mu\eta'_\mu\pi i}=x'_{[\eta]},$$

wobei die den Buchstaben x, x' beigefügten Zeichen $[\varepsilon]$, $[\eta]$ die Complexe $\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \dots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\eta_1 & \dots & \eta_p\\ \eta'_1 & \dots & \eta'_p\end{bmatrix}$ beziehlich vertreten sollen, und setzt zugleich, indem man zur Abkürzung $e^{-\frac{2}{r}\pi i}$ mit τ, $\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\eta_\mu\varepsilon'_\mu-\eta'_\mu\varepsilon_\mu)$ mit $[\eta]|[\varepsilon]$ bezeichnet:

$$e^{-\frac{2}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\eta_\mu\varepsilon'_\mu-\eta'_\mu\varepsilon_\mu)\pi i}=\tau^{[\eta]|[\varepsilon]},$$

so entsteht aus der genannten Formel die Gleichung:

$$r^p x'_{[\eta]}=\sum_{[\varepsilon]}\tau^{[\eta]|[\varepsilon]}x_{[\varepsilon]},$$

und es ist dabei die auf der rechten Seite angedeutete Summation über alle Terme zu erstrecken, die aus dem allgemeinen Gliede hervorgehen, indem man darin an Stelle des Systems der $2p$ in $[\varepsilon]$ vorkommenden Buchstaben $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_p$ der Reihe nach die sämmtlichen r^{2p} Variationen der Elemente $0, 1, \dots, r-1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung treten lässt. Die letzte Gleichung umfasst, da das mit $x'_{[\eta]}$ bezeichnete Thetaproduct ungeändert bleibt, wenn man die Grössen $\eta_1, \dots, \eta_p, \eta'_1, \dots, \eta'_p$ um ganze Vielfache von r ändert, im Ganzen nur r^{2p} verschiedene specielle Gleichungen; man erhält dieselben, wenn man an Stelle des Systems der $2p$ in $[\eta]$ vorkommenden Buchstaben $\eta_1, \dots, \eta_p, \eta'_1, \dots, \eta'_p$ der Reihe nach die r^{2p} soeben angeführten Variationen setzt. Das auf diese Weise entstehende System von r^{2p} linearen Gleichungen, dem man durch passend gewählte Anordnung eine übersichtliche Gestalt verleihen kann,

lässt sich für die Untersuchung der aus der Formel (θ_2'') entspringenden Relationen zwischen Thetafunctionen mit Vortheil verwenden.

Vergleicht man jetzt die Endformel (θ_1'') des vorhergehenden Artikels mit der hier gewonnenen Formel (θ_2''), so erscheinen diese beiden Formeln zwar in Ansehung dessen, dass die erste einem beliebigen ungeraden $n = 2\nu + 1 = r$, die zweite einem beliebigen geraden $n = 2\nu = 2r$ entspricht, als gleichberechtigt, nicht aber, wenn man die ganze Zahl r, die durch ihr Auftreten als gemeinsamer Nenner bei den Charakteristikenelementen eine Gruppe zusammengehöriger Thetafunctionen fixirt, und die mit Rücksicht darauf als die eigentliche Fundamentalconstante in den Formeln zu betrachten ist, als gegeben ansieht. Alsdann zeigt sich vielmehr ein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Formeln. Nicht nur gilt die Formel (θ_2'') für beliebiges r, während die Formel (θ_1'') auf ungerades r beschränkt ist, sondern es erscheint auch bei ungeradem r die Formel (θ_2'') als die allgemeinere, weil sie zu gegebenem Werthe von r eine weit grössere Anzahl von Thetarelationen zu liefern vermag als die Formel (θ_1'').

Was schliesslich die Bedeutung der in der vorliegenden Arbeit gewonnenen Formeln betrifft, so mag hier nur kurz bemerkt werden, dass dieselben die Mittel gewähren, um die Relationen zwischen jenen Thetafunctionen zu gewinnen, deren Charakteristiken aus beliebigen rationalen Zahlen als Elementen gebildet sind, während die Anwendbarkeit der Riemann'schen Thetaformel auf den Fall, wo diese Elemente halbe Zahlen sind, beschränkt ist. Diese allgemeineren Thetafunctionen sind aber für die Theorie der Abel'schen Functionen und der algebraischen Gleichungen von nicht geringerer Bedeutung wie die zuletzt erwähnten, bis jetzt fast ausschliesslich betrachteten speciellen. Durch die Gewinnung der Formeln (θ_1''), (θ_2'') ist somit der mathematischen Speculation ein Gebiet zugänglich gemacht, in das einzudringen bisher mit den grössten Schwierigkeiten verknüpft war. Bezüglich der Anwendung der gewonnenen Formeln auf einen speciellen Fall möge auf eine im 22ten Bande der *Mathematischen Annalen* erscheinende Arbeit: »Über Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind« verwiesen werden.

Würzburg, im Mai 1883.

NOTE
SUR CERTAINES
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

PAR

ADOLPH STEEN

À COPENHAGUE.

1. Soit proposée l'équation différentielle de l'ordre n

$$f(x, y, n, p) = 0, \tag{1}$$

dont le premier membre se réduit à

$$f(x, y, n, n) = y^{(n)} - \frac{ax^n}{[n-1]} y^{(n-1)} = 0,$$

lorsque $p = n$, tandis qu'en supposant des p entier et plus grand que n il contient une suite de termes, représentée par

$$\sum_{r=2}^{r=n} (-1)^r \frac{(p-n)(p-n+1)\ldots.(p-n+r-2)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,r-1} \frac{ax^{n-r}}{[n-r]} y^{(n-r)}. \tag{2}$$

Cette équation jouit de la propriété remarquable de ne pas changer essentiellement de forme par des différentiations successives. C'est ce qui se voit par la différentiation des deux termes consécutifs contenant $x^{n-r+1}y^{(n-r+1)}$ et $x^{n-r}y^{(n-r)}$ en tant qu'elle contribue à former le terme général de la nouvelle équation, savoir

$$(-1)^r \frac{(p-n+1)(p-n)\ldots.(p-n+r-3)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,r-1} \frac{ax^{n-r}}{[n-r]} y^{(n-r+1)},$$

qui provient aussi du terme général de la proposée par le changement de p en $p-1$, de y en y'. *Donc en différentiant l'équation* (1) *on trouve*

$$(3) \qquad f(x,\, y',\, n,\, p-1) = 0.$$

De même par $p-n$ différentiations on parvient à

$$(4) \qquad f(x,\, y^{(p-n)},\, n,\, n) = y^{(p)} - \frac{ax^{n-1}}{[n-1]}\, y^{(p-1)} = 0,$$

en supposant seulement que p soit plus grand que $n-1$.

Or l'intégration de l'équation (1) dépend de celle de l'équation (4), pour laquelle on trouve

$$y^{(p-1)} = 0 \text{ et } y^{(p-1)} = c_p e^{\frac{ax^n}{1.2\ldots n}},$$

on a par suite

$$(5) \qquad y = c_1 + c_2 x + \ldots + c_{p-1} x^{p-1} \text{ et } y = c_p \int^{p-1} e^{\frac{ax^n}{1.2\ldots n}}\, dx^{p-1},$$

ce qui donne l'intégrale complète de la proposée, si $p = n$. Pour des valeurs plus grandes de p elle contient $p-n$ constantes de trop. On en réduit le nombre au moyen des conditions à remplir, pour que la première intégrale particulière (5) rende la proposée identique. Ainsi par exemple l'équation

$$f(x,\, y,\, 3,\, 7) = 0$$

a les intégrales particulières

$$y = x^4 + \frac{4x}{a},\ y = x^5 + \frac{20x^2}{a},\ y = \int\int e^{\frac{1}{6}ax^3}\, dx^2.$$

C'est pour traiter la première intégrale (5) à part, que nous l'avons séparée de la dernière, à laquelle les constantes arbitraires de l'intégration l'auraient attachée.

2. Pour des valeurs de p depuis 0 jusqu'à $n-1$ les derniers termes de la suite (2) du premier membre de la proposée s'évanouissent, dès

que $n - r = p - 2$, et de plus les termes restants peuvent être transformés en

(6) $$-\sum_{r=2}^{r=n-p+1} \frac{(n-p)(n-p+1)\ldots.(n-p-r+2)}{1 \,.\, 2 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, r-1} \frac{ax^{n-r}}{[n-r]}.$$

Mais cette transformation n'affecte en rien la démonstration de la propriété, que nous venons de reconnaître. Seulement il faut faire de cette propriété un autre emploi que plus haût. La proposée étant une intégrale première de l'équation (3), une nouvelle intégration donnera

$$f(x,\ y^{(-1)},\ n,\ p+1) = c_n,$$

et ainsi de suite, de sorte qu'après $n-p$ intégrations on parvient à

(7) $$f(x,\ y^{(-n+p)},\ n,\ n) = c_{p+1} + c_{p+2}x + \ldots. + c_n x^{n-p-1}.$$

L'intégrale de cette équation étant

$$y^{(p-1)} = e^{\frac{ax^n}{1.2\ldots n}}\left(c_p + \int e^{\frac{-ax^n}{1.2\ldots n}}(c_{p+1} + c_{p+2}x + \ldots. + c_n x^{n-p-1})\, dx\right),$$

l'équation (1) sera donc dans ce cas complètement integrée par

$$y = c_1 + c_2 x + \ldots. + c_{p-1}x^{p-2} +$$

$$+ \int^{p-2} dx^{p-2} \int e^{\frac{ax^n}{1.2\ldots n}} dx \left(c_p + \int e^{\frac{-ax^n}{1.2\ldots n}}(c_{p+1} + c_{p+2}x \ldots. + c_n x^{n-p-1})\, dx\right).$$

Remarquons par exemple que, p étant l'unité, l'équation

$$f(x,\ y,\ n,\ 1) = 0$$

a l'intégrale complète

(8) $$y = e^{\frac{ax^n}{1.2\ldots n}}\left(c_1 + \int e^{\frac{-ax^n}{1.2\ldots n}}(c_2 + c_3 x + \ldots. + c_n x^{n-2})\, dx\right),$$

dont nous nous servirons plus tard.

3. En dernier lieu, considérons les cas de $p = 0$ et de p entier négatif et changeons p en $-p$ dans la proposée, qui sera alors représentée par

(9) $$f(x,\ y,\ n,\ -p) = 0.$$

Le premier membre ne sera encore changé que quant à la suite (2), qui deviendra

$$-\sum_{r=2}^{r=n} \frac{(p+n)(p+n-1)\dots(p+n-r+2)}{1\,.\,2\,\dots\dots\dots\, r-1}\,\frac{ax^{n-r}}{[n-r]}\,y^{(n-r)}.$$

C'est donc par $p+n$ intégrations qu'il faut remonter à l'équation intégrable de la forme (7), savoir

$$f(x,\ y^{(-p-n)},\ n,\ n) = c_1 + c_2 x + \dots + c_n x^{n-1} + \dots + c_{p+n} x^{p+n-1}.$$

Avant d'aller plus loin, observons, qu'en faisant toutes les constantes égales à zéro nous trouvons dans ce cas de cette équation l'intégrale

$$y^{(-p-1)} = ce^{\frac{ax^n}{1\,.\,2\dots n}},$$

par conséquent pour celle de l'équation (9)

$$(10)\qquad y = c\,\frac{d^{p+1}\,e^{\frac{ax^n}{1\,.\,2\dots n}}}{dx^{p+1}},$$

ce qui est bien identique à la dernière intégrale (5), lorsque nous y changeons p en $-p$.

Maintenant pour arriver à l'intégrale complète de l'équation (9), il faut faire varier la constante c de l'intégrale particulière (10), puis déterminer les constantes superflues. Cependant on parvient au résultat, en verité bien simple, d'une manière beaucoup plus expéditive. Commençons par l'intégration de

$$(11)\qquad f(x,\ y,\ n,\ 0) = 0$$

au moyen de

$$f(x,\ y^{(-1)},\ n,\ -1) = 0,$$

dont l'intégrale résulte de l'expression (8) par le changement de y en $y^{(-1)}$. Donc nous en concluons l'intégrale suivante de (11)

$$y = \frac{d.}{dx}\,e^{\frac{ax^n}{1\,.\,2\dots n}}\left(c_1 + \int e^{\frac{-ax^n}{1\,.\,2\dots n}}(c_2 + c_3 x + \dots + c_n x^{n-2})\,dx\right).$$

De même on remonte successivement aux intégrales de l'équation (9) dans les cas de $p = 1, 2, 3 \ldots.$, en différentiant toujours celle qui repond à la valeur précédente de p. Partant l'intégrale complète est

$$y = \frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}} e^{\frac{ax^n}{1.2\ldots n}} \left(c_1 + \int e^{\frac{ax^n}{1.2\ldots n}} (c_2 + c_3 x + \ldots + c_n x^{n-2})\, dx\right).$$

Donc on sait intégrer la proposée pour toutes les valeurs de p qui sont des nombres entiers.

4. L'intégrale multiple (5) transformée en intégrale définie devient

$$(12) \qquad y = \frac{1}{[p-2]} \int_k^x (x-\alpha)^{p-2} e^{\frac{a\alpha^n}{1.2\ldots n}} d\alpha,$$

étant $k^n = -\infty$. Par différentiation on en tire

$$y^{(r)} = \frac{1}{[p-r-2]} \int_k^x (x-\alpha)^{p-r-2} e^{\frac{a\alpha^n}{1.2\ldots n}} d\alpha,$$

en supposant $p > r + 1$, ce qui substitué dans la proposée, r étant 0, 1, 2 .... n, lui donnera la forme

$$\frac{1}{[p-n-1]} \int_k^x \left(p - n - 1 - \frac{a\alpha^{n-1}}{[n-1]} (x-\alpha)\right) (x-\alpha)^{p-n-2} e^{\frac{a\alpha}{1.2\ldots n}} d\alpha = 0$$

L'expression sous le signe d'intégration se réduisant à

$$e^{\frac{a\alpha^n}{1.2\ldots n}} d(x-\alpha)^{p-n-1} + (x-\alpha)^{p-n-1} de^{\frac{a\alpha^n}{1.2\ldots n}},$$

on n'a qu'à satisfaire à la condition:

$$\left| e^{\frac{a\alpha^n}{1.2\ldots n}} (x-\alpha)^{p-n-1} \right|_k^x = 0.$$

Maintenant il faut et il suffit, pour obtenir une identité, qu'on ait $k^n = -\infty$ et $p > n + 1$.

Donc l'intégrale définie (12) est une intégrale particulière de la proposée pour toutes les valeurs de $p > n + 1$, même celles qui ne sont pas des nombres entiers.

5. Ajoutons enfin qu'on peut dans l'exposition précédente changer partout $\frac{ax^{n-r}}{[n-r]}$ en $X^{(r)}$, étant

$$X = ax^n + a_1 x^{n-1} + \ldots . + a_{n-1}x + a_n,$$

et parvenir aux mêmes résultats.

SUR LE MULTIPLICATEUR
DES
FONCTIONS HYPERELLIPTIQUES DE PREMIER ORDRE

PAR

MARTIN KRAUSE

à ROSTOCK.

Si on pose:

$$N\tau'_{11} = (cd)_{02} + (ac)_{02}\tau_{11} + 2(bc)_{02}\tau_{12} + (db)_{02}\tau_{22} + (ab)_{02}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})$$

$$N\tau'_{12} = (cd)_{12} + (ac)_{12}\tau_{11} + [2(bc)_{12} - n]\tau_{12} + (db)_{12}\tau_{22} + (ab)_{12}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})$$

$$N\tau'_{22} = (cd)_{31} + (ac)_{31}\tau_{11} + 2(bc)_{31}\tau_{12} + (db)_{31}\tau_{22} + (ab)_{31}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})$$

$$N = (cd)_{23} + (ac)_{23}\tau_{11} + 2(bc)_{23}\tau_{12} + (db)_{23}\tau_{22} + (ab)_{23}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})$$

$$C_2 = c_2 - a_2\tau_{21} - b_2\tau_{22}, \qquad C_3 = - c_3 + a_3\tau_{21} + b_3\tau_{22}$$

$$D_2 = d_2 - a_2\tau_{11} - b_2\tau_{12}, \qquad D_3 = - d_3 + a_3\tau_{11} + b_3\tau_{12},$$

où n désigne un degré de transformation complètement arbitraire, on aura:

$$\frac{\partial\tau'_{11}}{\partial\tau_{11}} = n\frac{C_2^2}{N^2}, \qquad \frac{\partial\tau'_{11}}{\partial\tau_{12}} = -\frac{2nC_2D_2}{N^2}, \qquad \frac{\partial\tau'_{11}}{\partial\tau_{22}} = n\frac{D_2^2}{N^2}$$

$$\frac{\partial\tau'_{12}}{\partial\tau_{11}} = n\frac{C_2C_3}{N^2}, \qquad \frac{\partial\tau'_{12}}{\partial\tau_{12}} = -\frac{n(C_2D_3 + C_3D_2)}{N^2}, \qquad \frac{\partial\tau'_{12}}{\partial\tau_{22}} = n\frac{D_2D_3}{N^2}$$

$$\frac{\partial\tau'_{22}}{\partial\tau_{11}} = n\frac{C_3^2}{N^2}, \qquad \frac{\partial\tau'_{22}}{\partial\tau_{12}} = -\frac{2nC_3D_3}{N^2}, \qquad \frac{\partial\tau'_{22}}{\partial\tau_{22}} = n\frac{D_3^2}{N^2}.$$

Il suit de là que le déterminant fonctionnel est:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\tau'_{11}}{\partial\tau_{11}} & \frac{\partial\tau'_{11}}{\partial\tau_{12}} & \frac{\partial\tau'_{11}}{\partial\tau_{22}} \\ \frac{\partial\tau'_{12}}{\partial\tau_{11}} & \frac{\partial\tau'_{12}}{\partial\tau_{12}} & \frac{\partial\tau'_{12}}{\partial\tau_{22}} \\ \frac{\partial\tau'_{22}}{\partial\tau_{11}} & \frac{\partial\tau'_{22}}{\partial\tau_{12}} & \frac{\partial\tau'_{22}}{\partial\tau_{22}} \end{vmatrix} = -\frac{n^3(C_2D_3-C_3D_2)^3}{N^6} = -n^3(C_2D_3-C_3D_2)^{-3}.$$

Si l'on pose ensuite:

$$A_0 = a_0 + a_3\tau'_{11} + a_2\tau'_{12}, \qquad A_1 = a_1 + a_3\tau'_{21} + a_2\tau'_{22}$$

$$B_0 = b_0 + b_3\tau'_{11} + b_2\tau'_{12}, \qquad B_1 = b_1 + b_3\tau'_{21} + b_2\tau'_{22}$$

on a, d'après une remarque de Brioschi (Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences t. 47, p. 311)

$$-(A_0B_1 - B_0A_1)(C_2D_3 - C_3D_2) = n^2.$$

Il suit de là que le déterminant fonctionnel prend la valeur:

$$\frac{(A_0B_1 - B_0A_1)^3}{n^3}.$$

En maintenant les désignations que j'ai employées dans mon travail sur les équations qui donnent le multiplicateur des fonctions hyperelliptiques de premier ordre (Mathematische Annalen T. 20), on a:

$$A_0B_1 - B_0A_1 = \frac{M(K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21})}{(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21})}.$$

Par conséquent:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial\tau'_{11}}{\partial\tau_{11}} & \frac{\partial\tau'_{12}}{\partial\tau_{11}} & \frac{\partial\tau'_{22}}{\partial\tau_{11}} \\ \frac{\partial\tau'_{11}}{\partial\tau_{12}} & \frac{\partial\tau'_{12}}{\partial\tau_{12}} & \frac{\partial\tau'_{22}}{\partial\tau_{12}} \\ \frac{\partial\tau'_{11}}{\partial\tau_{22}} & \frac{\partial\tau'_{12}}{\partial\tau_{22}} & \frac{\partial\tau'_{22}}{\partial\tau_{22}} \end{vmatrix} = \frac{M^3}{n^3}\,\frac{(K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21})^3}{(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21})^3}.$$

Posons maintenant d'après ROSENHAIN:

$$k^2 = \frac{\vartheta_{23}^2 \cdot \vartheta_{01}^2}{\vartheta_4^2 \cdot \vartheta_5^2}, \qquad \lambda^2 = \frac{\vartheta_2^2 \cdot \vartheta_{23}^2}{\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_4^2}, \qquad \mu^2 = \frac{\vartheta_2^2 \cdot \vartheta_{01}^2}{\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_5^2}$$

$$k_1^2 = \frac{\vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{12}^2}{\vartheta_4^2 \cdot \vartheta_5^2}, \qquad \lambda_1^2 = \frac{\vartheta_0^2 \cdot \vartheta_{03}^2}{\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_4^2}, \qquad \mu_1^2 = \frac{\vartheta_{12}^2 \cdot \vartheta_0^2}{\vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{34}^2}$$

$$\lambda_k^2 = \frac{\vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^2}{\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_5^2}, \qquad \mu_\lambda^2 = \frac{\vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_0^2 \cdot \vartheta_2^2}{\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_5^2}, \qquad \mu_k^2 = \frac{\vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_{12}^2 \cdot \vartheta_{01}^2}{\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_5^2}$$

Alors on a:

$$\frac{\partial(k^2)}{\partial\tau_{ik}} = 2k^2 \left[\frac{\frac{\partial\vartheta_{01}}{\partial\tau_{ik}}}{\vartheta_{01}} + \frac{\frac{\partial\vartheta_{23}}{\partial\tau_{ik}}}{\vartheta_{23}} - \frac{\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\tau_{ik}}}{\vartheta_5} - \frac{\frac{\partial\vartheta_4}{\partial\tau_{ik}}}{\vartheta_4}\right]$$

$$\frac{\partial(\lambda^2)}{\partial\tau_{ik}} = 2\lambda^2 \left[\frac{\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\tau_{ik}}}{\vartheta_2} + \frac{\frac{\partial\vartheta_{23}}{\partial\tau_{ik}}}{\vartheta_{23}} - \frac{\frac{\partial\vartheta_{34}}{\partial\tau_{ik}}}{\vartheta_{34}} - \frac{\frac{\partial\vartheta_4}{\partial\tau_{ik}}}{\vartheta_4}\right]$$

$$\frac{\partial(\mu^2)}{\partial\tau_{ik}} = 2\mu^2 \left[\frac{\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\tau_{ik}}}{\vartheta_2} + \frac{\frac{\partial\vartheta_{01}}{\partial\tau_{ik}}}{\vartheta_{01}} - \frac{\frac{\partial\vartheta_{34}}{\partial\tau_{ik}}}{\vartheta_{34}} - \frac{\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\tau_{ik}}}{\vartheta_5}\right].$$

Si l'on considère les relations:

$$4\pi i \frac{\partial\vartheta_\alpha}{\partial\tau_{ii}} = \left[\frac{\partial^2\vartheta_\alpha(v_1 v_2)}{\partial v_i^2}\right]_0 = \vartheta_\alpha''(v_i)_0$$

$$2\pi i \frac{\partial\vartheta_\alpha}{\partial\tau_{12}} = \left[\frac{\partial^2\vartheta_\alpha(v_1 v_2)}{\partial v_1 \partial v_2}\right]_0,$$

qu'on pose ensuite:

$$\frac{\vartheta_{01}''(v_i)_0}{\vartheta_{01}} - \frac{\vartheta_5''(v_i)_0}{\vartheta_5} = a_{ii}, \qquad \frac{\vartheta_{23}''(v_i)_0}{\vartheta_{23}} - \frac{\vartheta_4''(v_i)_0}{\vartheta_4} = b_{ii}, \qquad \frac{\vartheta_2''(v_i)_0}{\vartheta_2} - \frac{\vartheta_{34}''(v_i)_0}{\vartheta_{34}} = c_{ii}$$

et qu'on définisse d'une manière analogue les grandeurs a_{12}, b_{12}, c_{12}, on aura:

$$\frac{\partial(k^2)}{\partial\tau_{ii}}=\frac{k^2}{2\pi i}(a_{ii}+b_{ii}),\qquad \frac{\partial(\lambda^2)}{\partial\tau_{ii}}=\frac{\lambda^2}{2\pi i}(b_{ii}+c_{ii}),\qquad \frac{\partial(\mu^2)}{\partial\tau_{ii}}=\frac{\mu^2}{2\pi i}(c_{ii}+a_{ii})$$

$$\frac{\partial(k^2)}{\partial\tau_{12}}=\frac{k^2}{\pi i}(a_{12}+b_{12}),\qquad \frac{\partial(\lambda^2)}{\partial\tau_{12}}=\frac{\lambda^2}{\pi i}(b_{12}+c_{12}),\qquad \frac{\partial(\mu^2)}{\partial\tau_{12}}=\frac{\mu^2}{\pi i}(c_{12}+a_{12}).$$

De là résulte l'équation:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial(k^2)}{\partial\tau_{11}} & \frac{\partial(\lambda^2)}{\partial\tau_{11}} & \frac{\partial(\mu^2)}{\partial\tau_{11}} \\ \frac{\partial(k^2)}{\partial\tau_{12}} & \frac{\partial(\lambda^2)}{\partial\tau_{12}} & \frac{\partial(\mu^2)}{\partial\tau_{12}} \\ \frac{\partial(k^2)}{\partial\tau_{22}} & \frac{\partial(\lambda^2)}{\partial\tau_{22}} & \frac{\partial(\mu^2)}{\partial\tau_{22}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi i}\right)^3 k^2\lambda^2\mu^2 \begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} & c_{11} \\ a_{12} & b_{12} & c_{12} \\ a_{22} & b_{22} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

Mais maintenant on a les équations:

$$\frac{\vartheta_2''(v_i)_0}{\vartheta_2}=\frac{\vartheta_5''(v_i)_0}{\vartheta_5}-\frac{\vartheta_1'(v_i)_0^2}{\vartheta_5^2}\,\frac{\vartheta_{12}^2}{\vartheta_2^2}+\frac{\vartheta_3'(v_i)_0^2}{\vartheta_5^2}\,\frac{\vartheta_{23}^2}{\vartheta_2^2}$$

$$\frac{\vartheta_4''(v_i)_0}{\vartheta_4}=\frac{\vartheta_5''(v_i)_0}{\vartheta_5}-\frac{\vartheta_1'(v_i)_0^2}{\vartheta_5^2}\,\frac{\vartheta_{14}^2}{\vartheta_4^2}-\frac{\vartheta_3'(v_i)_0^2}{\vartheta_5^2}\,\frac{\vartheta_{34}^2}{\vartheta_4^2}$$

$$\frac{\vartheta_{01}''(v_i)_0}{\vartheta_{01}}=\frac{\vartheta_5''(v_i)_0}{\vartheta_5}-\frac{\vartheta_1'(v_i)_0^2}{\vartheta_5^2}\,\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_{01}^2}-\frac{\vartheta_{13}'(v_i)_0^2}{\vartheta_5^2}\,\frac{\vartheta_{03}^2}{\vartheta_{01}^2}$$

$$\frac{\vartheta_{23}''(v_i)_0}{\vartheta_{23}}=\frac{\vartheta_5''(v_i)_0}{\vartheta_5}-\frac{\vartheta_3'(v_i)_0^2}{\vartheta_5^2}\,\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_{23}^2}-\frac{\vartheta_{13}'(v_i)_0^2}{\vartheta_5^2}\,\frac{\vartheta_{12}^2}{\vartheta_{23}^2}$$

$$\frac{\vartheta_{34}''(v_i)_0}{\vartheta_{34}}=\frac{\vartheta_5''(v_i)_0}{\vartheta_5}+\frac{\vartheta_3'(v_i)_0^2}{\vartheta_5^2}\,\frac{\vartheta_4^2}{\vartheta_{34}^2}+\frac{\vartheta_{13}'(v_i)_0^2}{\vartheta_5^2}\,\frac{\vartheta_{14}^2}{\vartheta_{34}^2}$$

et des équations semblables pour les quantités:

$$\left[\frac{\partial^2\vartheta_\alpha(v_1 v_2)}{\partial v_1\,\partial v_2}\right]_0.$$

Il suit de là que le déterminant des quantités a prend la forme:

$$-\frac{2\,.\,\vartheta_{12}^2\,.\,\vartheta_{14}^2\,.\,\vartheta_0^2\,.\,\vartheta_{03}^2}{\vartheta_{01}^2\vartheta_5^4\,.\,\vartheta_4^2\,.\,\vartheta_{23}^2\,.\,\vartheta_2^2\,.\,\vartheta_{34}^2}\left\{\vartheta_1'(v_1)_0\vartheta_{13}'(v_2)_0-\vartheta_1'(v_2)_0\vartheta_{13}'(v_1)_0\right\}$$

$$.\left\{\vartheta_{13}'(v_1)_0\vartheta_3'(v_2)_0-\vartheta_{13}'(v_2)_0\vartheta_3'(v_1)_0\right\}\left\{\vartheta_3'(v_1)_0\vartheta_1'(v_2)_0-\vartheta_3'(v_2)_0\vartheta_1'(v_1)_0\right\}$$

ou encore:

$$-2\pi^6\,.\,k_1^2\lambda_1^2\mu_1^2\,.\,\lambda_k^2\mu_\lambda^2\,.\,\mu_k^2\,4^3(K_{11}K_{22}-K_{12}\,.\,K_{21})^3$$

puisqu'on a les équations:

$$\begin{aligned}
\vartheta_1'(v_1)_0\vartheta_{13}'(v_2)_0-\vartheta_1'(v_2)_0\vartheta_{13}'(v_1)_0 &= -\pi^2\vartheta_5\vartheta_{12}\vartheta_{01}\vartheta_{14}\\
\vartheta_{13}'(v_1)_0\vartheta_3'(v_2)_0-\vartheta_{13}'(v_2)_0\vartheta_3'(v_1)_0 &= \pi^2\vartheta_5\vartheta_{34}\vartheta_{03}\vartheta_{23}\\
\vartheta_3'(v_1)_0\vartheta_1'(v_2)_0-\vartheta_3(v_2)_0\vartheta_1'(v_1)_0 &= -\pi^2\vartheta_5\vartheta_0\vartheta_4\vartheta_2\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent:

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial(k^2)}{\partial\tau_{11}} & \frac{\partial(\lambda^2)}{\partial\tau_{11}} & \frac{\partial(\mu^2)}{\partial\tau_{11}}\\ \frac{\partial(k^2)}{\partial\tau_{12}} & \frac{\partial(\lambda^2)}{\partial\tau_{12}} & \frac{\partial(\mu^2)}{\partial\tau_{12}}\\ \frac{\partial(k^2)}{\partial\tau_{22}} & \frac{\partial(\lambda^2)}{\partial\tau_{22}} & \frac{\partial(\mu^2)}{\partial\tau_{22}} \end{vmatrix} = -\pi^3k^2\lambda^2\mu^2\,.\,k_1^2\lambda_1^2\mu_1^2\lambda_k^2\mu_\lambda^2\,.\,\mu_k^2\,4^3(K_{11}K_{22}-K_{12}K_{21})^3.$$

Si nous désignons les quantités transformées correspondant aux quantités k, λ, μ, K, par c, l, m, C, on a d'une manière anlogue:

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial(c^2)}{\partial\tau_{11}'} & \frac{\partial(l^2)}{\partial\tau_{11}'} & \frac{\partial(m^2)}{\partial\tau_{11}'}\\ \frac{\partial(c^2)}{\partial\tau_{12}'} & \frac{\partial(l^2)}{\partial\tau_{12}'} & \frac{\partial(m^2)}{\partial\tau_{12}'}\\ \frac{\partial(c^2)}{\partial\tau_{22}'} & \frac{\partial(l^2)}{\partial\tau_{22}'} & \frac{\partial(m^2)}{\partial\tau_{22}'} \end{vmatrix} = -\pi^3c^2l^2m^2c_1^2l_1^2m_1^2l_c^2m_l^2m_c^2\,4^3(C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21})^3.$$

Si donc nous posons:

$$F = \begin{vmatrix} \frac{\partial(c^2)}{\partial(k^2)} & \frac{\partial(l^2)}{\partial(k^2)} & \frac{\partial(m^2)}{\partial(k^2)} \\ \frac{\partial(c^2)}{\partial(\lambda^2)} & \frac{\partial(l^2)}{\partial(\lambda^2)} & \frac{\partial(m^2)}{\partial(\lambda^2)} \\ \frac{\partial(c^2)}{\partial(\mu^2)} & \frac{\partial(l^2)}{\partial(\mu^2)} & \frac{\partial(m^2)}{\partial(\mu^2)} \end{vmatrix}$$

nous obtiendrons la relation:

$$(4) \qquad M^3 \doteq \frac{n^3 F \cdot k^2 \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot k_1^2 \lambda_1^2 \mu_1^2 \lambda_k^2 \mu_\lambda^2 \cdot \mu_k^2}{c^2 \cdot l^2 \cdot m^2 \cdot c_1^2 l_1^2 m_1^2 \cdot l_c^2 m_l^2 m_c^2}.$$

SUR L'ÉQUATION

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[2\nu\frac{k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} + 2\nu_1\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} - 2\nu_2\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x}\right]\frac{dy}{dx}$$

$$= \left[\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}(n_3 - \nu_2)(n_3 + \nu_2 + 1) + \frac{\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x}(n_2 - \nu_1)(n_2 + \nu_1 + 1)\right.$$

$$\left. + \frac{k^2 \operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}(n_1 - \nu)(n_1 + \nu + 1) + k^2 \operatorname{sn}^2 x(n + \nu + \nu_1 + \nu_2)(n - \nu - \nu_1 - \nu_2 + 1) + h\right]y$$

ÉQUATION OÙ ν, ν_1, ν_2, DÉSIGNENT DES NOMBRES QUELCONQUES,

n, n_1, n_2, n_3 DES NOMBRES ENTIERS POSITIFS OU NÉGATIFS,

ET h UNE CONSTANTE ARBITRAIRE.

DEUXIÈME MÉMOIRE

PAR

C^te^ de SPARRE

À LYON.

VI.

Passons maintenant au cas de $n_2 = n_3 = 0$, cas comprenant avec l'équation de LAMÉ celle de M. PICARD.

Posons pour ce cas

$$\operatorname{dn}^2 a_i = x_i, \qquad k^2 \operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i = u_i.$$

Les équations (10) et (12) deviendront alors en les multipliant par une puissance convenable de k

$$\sum_1^\beta u_i = 0, \quad \sum_1^\beta (1 - x_i) u_i = 0, \quad \ldots\ldots \quad \sum_1^\beta (1 - x_i)^{n-2} u_i = 0,$$

$$\sum_1^\beta \frac{u_i}{x_i} = 0, \quad \sum_1^\beta \frac{u_i}{x_i^2} = 0, \quad \sum_1^\beta \frac{x_i - k'^2}{x_i^3} u_i = 0, \quad \ldots\ldots \quad \sum_1^\beta \frac{(x_i - k'^2)^{n_1 - 2}}{x_i^{n_1}} u_i = 0;$$

ici $\beta = n + n_1$.

En résolvant ces $\beta - 1$ équations linéaires et homogènes par rapport aux quantités u on aura

$$\frac{u_1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ (1 - x_2) & (1 - x_3) & \ldots\ldots & 1 - x_\beta \\ (1 - x_2)^2 & (1 - x_3)^2 & \ldots\ldots & (1 - x_\beta)^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (1 - x_2)^{n-2} & (1 - x_3)^{n-2} & \ldots\ldots & \\ \frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_3} & \ldots\ldots & \\ \frac{1}{x_2^2} & \frac{1}{x_3^2} & \ldots\ldots & \\ \frac{x_2 - k'^2}{x_2^3} & \frac{x_3 - k'^2}{x_3^3} & \ldots\ldots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{(x_2 - k'^2)^{n_1 - 2}}{x_2^{n_1}} & \frac{(x_3 - k'^2)^{n_1 - 2}}{x_3^{n_1}} & \ldots\ldots & \end{vmatrix}} = \ldots\ldots$$

$$\cdots\cdots = \frac{(-1)^{i-1}u_i}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots\cdots & 1 & 1 & \cdots\cdots \\ 1-x_1 & \cdots\cdots & 1-x_{i-1} & 1-x_{i+1} & \cdots\cdots \\ (1-x_1)^2 & \cdots\cdots & (1-x_{i-1})^2 & (1-x_{i+1})^2 & \cdots\cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}$$

Mais on peut transformer ces équations de la manière suivante: Multiplions les dénominateurs de tous les rapports précédants par

$$x_1^{n_1} x_2^{n_1} \cdots\cdots x_\beta^{n_1}$$

nos équations pourront s'écrire

$$\frac{u_1}{x_1^{n_1}\begin{vmatrix} x_2^{n_1} & x_3^{n_1} & \cdots\cdots & x_\beta^{n_1} \\ (1-x_2)x_2^{n_1} & (1-x_3)x_3^{n_1} & \cdots\cdots & (1-x_\beta)x_\beta^{n_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (1-x_2)^{n-2}x_2^{n_1} & (1-x_3)^{n-2}x_3^{n_1} & \cdots\cdots & \\ x_2^{n_1-1} & x_3^{n_1-1} & \cdots\cdots & \\ x_2^{n_1-2} & x_3^{n_1-2} & \cdots\cdots & \\ (x_2-k'^2)x_2^{n_1-3} & (x_3-k'^2)x_3^{n_1-3} & \cdots\cdots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (x_2-k'^2)^{n_1-2} & (x_3-k'^2)^{n_1-2} & \cdots\cdots & \end{vmatrix}} = \cdots\cdots$$

Mais je remarquerai que le déterminant qui figure au dénominateur de u_1 est égal au déterminant

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_2 & x_3 & \ldots\ldots & x_\beta \\ x_2^2 & x_3^2 & \ldots\ldots & x_\beta^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ x_2^{\beta-2} & x_3^{\beta-2} & \ldots\ldots & x_\beta^{\beta-2} \end{vmatrix}$$

multiplié par un facteur constant.

En effet si l'on développait les élements du 1[er] déterminant on verrait que l'un quelconque de ces élements est une fonction entière de l'une des quantités x_2, x_3 ..... x_β de degré $\beta - 2$ au plus, et que, dans une même ligne on passe de l'élement de la première colonne à celui de l'une quelconque des autres en remplaçant x_2 par l'une des quantités x_3 ..... x_β, les coefficients restant les mêmes. Chaque ligne du premier déterminant peut donc être formée par l'addition de plusieurs lignes du déterminant $\varDelta_1$ multipliées au préalable par des facteurs constants convenables.

Le premier déterminant est donc égal à $\varDelta_1$ multiplié par un facteur constant. Nos équations pourront donc s'écrire

$$\frac{u_1}{x_1^{n_1}\varDelta_1} = \frac{-u_2}{x_2^{n_1}\varDelta_2} = \ldots\ldots = \frac{(-1)^{i-1}u_i}{x_i^{n_1}\varDelta_i} = \ldots\ldots$$

où

$$\varDelta_i = \begin{vmatrix} 1 & \ldots\ldots & 1 & 1 & \ldots\ldots \\ x_1 & \ldots\ldots & x_{i-1} & x_{i+1} & \ldots\ldots \\ x_1^2 & \ldots\ldots & x_{i-1}^2 & x_{i+1}^2 & \ldots\ldots \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot \\ x_1^{\beta-2} & \ldots\ldots & x_{i-1}^{\beta-2} & x_{i+1}^{\beta-2} & \ldots\ldots \end{vmatrix}.$$

Mais si nous posons (comme à la page 124 du 1[er] mémoire)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_\beta \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots\ldots & x_\beta^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ x_1^{\beta-1} & x_2^{\beta-1} & \ldots\ldots & x_\beta^{\beta-1} \end{vmatrix}$$

et

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_\beta)$$

on aura (comme à la page 125 du 1[er] mémoire)

$$\Delta = (-1)^{\beta-1} f'(x_1)\Delta_1 = (-1)^{\beta-2} f'(x_2)\Delta_2 = \ldots\ldots = (-1)^{\beta-i} f'(x_i)\Delta_i = \ldots$$
$$\ldots - f'(x_\beta)\Delta_\beta$$

de sorte que nos équations deviennent

$$\frac{u_1 f'(x_1)}{x_1^{n_1}} = \frac{u_2 f'(x_2)}{x_2^{n_1}} = \ldots\ldots = \frac{u_i f'(x_i)}{x_i^{n_1}} = \ldots\ldots = \frac{u_\beta f'(x_\beta)}{x_\beta^{n_1}} = \lambda$$

λ désignant la valeur commune de ces expressions.

En remplaçant $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_\beta$ par leurs valeurs ces équations deviennent

$$(51)\qquad \frac{k^2 \operatorname{sn} a_1 \operatorname{cn} a_1 \operatorname{dn} a_1 f'(x_1)}{x_1^{n_1}} = \frac{k^2 \operatorname{sn} a_2 \operatorname{cn} a_2 \operatorname{dn} a_2 f'(x_2)}{x_2^{n_1}} = \ldots$$
$$\ldots = \frac{k^2 \operatorname{sn} a_\beta \operatorname{cn} a_\beta \operatorname{dn} a_\beta f'(x_\beta)}{x_\beta^{n_1}} = \lambda.$$

Telles sont les équations qui doivent servir à déterminer les coefficients de la fonction $f(x)$ qui égalé à zéro admet pour racines $\operatorname{dn}^2 a_1$, $\operatorname{dn}^2 a_2$ ..... $\operatorname{dn}^2 a_\beta$.

Soit

$$f(x) = x^{\beta} + \alpha_0 x^{\beta-1} + \alpha_1 x^{\beta-2} + \ldots\ldots + \alpha_{\beta-1}.$$

On a d'abord en vertu de la relation (13)

$$h = (2n - 1)\sum_1^{\beta} k^2 \operatorname{sn}^2 a_i - (n + n_1 + \nu_1 + \nu_2)(n + n_1 - \nu_1 - \nu_2)$$
$$- k^2(n + \nu + \nu_2)(n - \nu - \nu_2)$$

et comme

$$\alpha_0 = -\sum_1^{\beta} \operatorname{dn}^2 a_i = -(n + n_1) + \sum_1^{\beta} k^2 \operatorname{sn}^2 a_i$$

on en déduira

$$(52)\qquad \alpha_0 = \frac{h + (n + n_1)(n_1 - n + 1) - (\nu_1 + \nu_2)^2 + k^2(n + \nu + \nu_2)(n - \nu - \nu_2)}{2n - 1}.$$

En prenant pour h l'expression dont nous sommes partis on suppose implicitement $n \lessgtr 0$.

Mais si n était nul la solution de l'équation se déduirait du cas que nous avons examiné précédemment où $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ en considérant comme inconnue $a_i + K$ au lieu de a_i.

α_0 est donc connu par la relation (52) en fonction des données du problème.

Elevons maintenant les équations (51) au carré elles pourront s'écrire

$$(53)\qquad \frac{-k'^2 + (1 + k'^2)x_1 - x_1^2}{x_1^{2n_1-1}} f'^2(x_1) = \frac{-k'^2 + (1 + k'^2)x_2 - x_2^2}{x_2^{2n_1-1}} f'^2(x_2) = \ldots$$
$$\ldots = \frac{-k'^2 + (1 + k'^2)x_\beta - x_\beta^2}{x_\beta^{2n_1-1}} f'^2(x_\beta) = \lambda^2.$$

Il résulte de là que l'équation

$$\frac{-k'^2 + (1 + k'^2)x - x^2}{x^{2n_1-1}} f'^2(x) - \lambda^2 = 0$$

admet toutes les racines $x_1, x_2, \ldots\ldots x_\beta$ de $f(x) = 0$ et que par suite son numérateur est divisible par $f(x)$. On aura donc

$$(54)\qquad \frac{-k'^2 + (1 + k'^2)x - x^2}{x^{2n_1-1}} f'^2(x) - \lambda^2 = f(x) f_1(x)$$

$f_1(x)$ étant une fonction de x dont le produit par x^{2n_1-1} est une fonction entière de degré β, car le premier membre de la relation (54) multiplié par x^{2n_1-1} est de degré 2β.

En prenant la dérivée de l'équation (54) on en déduit

$$(55)\qquad \left[2f''(x) \frac{-k'^2 + (1 + k'^2)x - x^2}{x^{2n_1-1}} \right.$$

$$\left. + f'(x) \frac{(2n_1 - 1)k'^2 - 2(n_1 - 1)(1 + k'^2)x + (2n_1 - 3)x^2}{x^{2n_1}} \right] f'(x)$$

$$= f'(x) f_1(x) + f_1'(x) f(x).$$

Mais $f'(x)$ étant premier avec $f(x)$, puisque nous supposons toutes les racines de $f(x) = 0$ distinctes, il en résulte que $f'(x)$ divisera le numérateur de $f_1'(x)$ et que l'on aura par suite

$$(56)\qquad f_1'(x) = \frac{Ax + B}{x^{2n_1}} f'(x)$$

A et B étant des constantes.

En effet le produit du second membre de la relation (55) par x^{2n_1} doit être un polynome entier en x de degré 2β.

Mais l'on a

$$f(x) = \sum_0^\beta \alpha_{i-1} x^{\beta-i}$$

$$\frac{f(x)}{x^{2n_1}} = \sum_0^\beta \alpha_{i-1} x^{\beta-2n_1-i}$$

$$\frac{f'(x)}{x^{2n_1}} = \sum_0^\beta (\beta - i)\alpha_{i-1} x^{n-n_1-i-1}$$

$$\frac{f''(x)}{x^{2n_1-1}} = \sum_0^\beta (\beta - i)(\beta - i - 1)\alpha_{i-1} x^{n-n_1-i-1}.$$

Posons maintenant

$$f_2(x) = 2f''(x)\frac{-k'^2 + (1 + k'^2)x - x^2}{x^{2n_1-1}}$$

$$+ f'(x)\frac{(2n_1 - 1)k'^2 - 2(n_1 - 1)(1 + k'^2)x + (2n_1 - 3)x^2}{x^{2n_1}}$$

ce qui peut s'écrire

$$f_2(x) = \sum_{-1}^{\beta} [-\alpha_i(\beta - i - 1)(2n - 2i - 1)$$

$$+ 2(1 + k'^2)(\beta - i)(n - i)\alpha_{i-1} - k'^2(\beta - i + 1)(2n - 2i + 1)\alpha_{i-2}] x^{n-n_1-i}.$$

On aura donc en divisant les deux membres de l'équation (55) par $f'(x)$ et en en prenant ensuite la dérivée

$$f_2'(x) = (Ax + B)\frac{f'(x)}{x^{2n_1}} + A\frac{f(x)}{x^{2n_1}} + (Ax + B)D_x\frac{f(x)}{x^{2n_1}}$$

ce qui peut s'écrire

$$f_2'(x) = \sum_{-1}^{\beta} [A\alpha_i(2n - 2i - 1) + 2B\alpha_{i-1}(n - i)] x^{n-n_1-i-1}.$$

et comme d'autre part on aura aussi

$$f_2'(x) = \sum_{-1}^{\beta} (n - n_1 - i)[-\alpha_i(\beta - i - 1)(2n - 2i - 1)$$

$$+ 2(1 + k'^2)(\beta - i)(n - i)\alpha_{i-1} - k'^2(\beta - i + 1)(2n - 2i + 1)\alpha_{i-2}] x^{n-n_1-i-1}$$

on aura en égalant les coefficients des puissances semblables de x

$$(n-n_1-i)[-\alpha_i(\beta-i-1)(2n-2i-1)+2(1+k'^2)(\beta-i)(n-i)\alpha_{i-1}$$
$$-k'^2(\beta-i+1)(2n-2i+1)\alpha_{i-2}]=A\alpha_i(2n-2i-1)+2B\alpha_{i-1}(n-i);$$

en faisant d'abord $i=-1$ et ensuite $i=0$ et remarquant que l'on doit prendre

$$\alpha_{-3}=\alpha_{-2}=0 \quad \text{et} \quad \alpha_{-1}=1$$

on obtiendra

$$A=-\beta(n-n_1+1)$$

$$B=(2n-1)\alpha_0+(n-n_1)\beta(1+k'^2)$$

et notre équation deviendra par suite

$$(57)\qquad (2n-2i-1)(2n-i)(i+1)\alpha_i-2(n-i)[(2n-1)\alpha_0$$
$$+i(2n-i)(1+k'^2)]\alpha_{i-1}-k'^2(\beta-i+1)(2n-2i+1)(n-n_1-i)\alpha_{i-2}=0,$$

d'où l'on tire

$$(58)\qquad \alpha_i=\frac{(2n-1)\alpha_0+i(2n-i)(1+k'^2)}{(2n-2i-1)(2n-i)(i+1)}2(n-i)\alpha_{i-1}$$
$$+\frac{(\beta-i+1)(2n-2i+1)(n-n_1-i)}{(2n-2i-1)(2n-i)(i+1)}k'^2\alpha_{i-2}$$

Toutefois cette formule donne lieu à une remarque lorsque $n_1>n$.

En faisant en effet $i=2n$ dans la relation (58) elle tombe en défaut et la relation (57) devient en la divisant par $(2n-1)$

$$2n\alpha_0\alpha_{2n-1}-k'^2\alpha_{2n-2}(n_1-n+1)(n_1+n)=0.$$

C'est une relation entre les quantités déjà connues α_{2n-1} et α_{2n-2} qui devra par suite se réduire à une identité.

Si l'on fait ensuite dans la formule (57) $i = 2n + 1,\ 2n + 2 \ldots\ldots \beta$ on aura en remarquant que $\alpha_\beta = 0$, $n_1 - n$ équations linéaires par rapport aux $n_1 - n$ quantités α_{2n}, $\alpha_{2n+1} \ldots\ldots \alpha_{\beta-1}$ qui permettront de les calculer.

On peut d'ailleurs faire ce calcul de la manière suivante.

Calculons au moyen de la formule (58) où l'on donne à i les valeurs $2n + 1, \ldots\ldots, \beta - 1$

$$\alpha_{2n+1},\ \alpha_{2n+2} \ldots\ldots \alpha_{\beta-1}$$

en fonction de α_0 et de α_{2n}, les expressions que l'on obtiendra pour ces quantités étant toutes linéaires par rapport à α_{2n}, en substituant les valeurs obtenues pour $\alpha_{\beta-2}$ et $\alpha_{\beta-1}$ dans la relation

$$(59) \qquad [(2n - 1)\alpha_0 - \beta(n_1 - n)(1 + k'^2)]\alpha_{\beta-1} - k'^2(2n_1 - 1)\alpha_{\beta-2} = 0$$

que l'on obtient en faisant $i = \beta$ dans l'équation (57), on en déduira la valeur de α_{2n}, la relation (59) étant, d'après ce qui a été dit, linéaire par rapport à cette quantité.

En particulier pour $n_1 = n + 1$, ce qui correspond au cas de l'équation de M. Picard, la relation (59) donnera de suite α_{2n} qui est ici $\alpha_{\beta-1}$.

On peut remarquer, de plus, que l'on pourrait sans nuire à la généralité supposer $n > n_1$. Il suffirait pour cela dans le cas de $n_1 > n$ de considérer comme inconnue $\operatorname{dn}^2(a_i + K)$ au lieu de $\operatorname{dn}^2 a_i$, on retomberait alors sur les équations dont nous sommes partis, mais où n_1 serait remplacé par n et réciproquement.

L'équation $f(x) = 0$ admet pour racines $\operatorname{dn}^2 a_1$, $\operatorname{dn}^2 a_2$, $\ldots\ldots$ $\operatorname{dn}^2 a_\beta$ mais le signe de l'une de ces quantités étant choisi arbitrairement, celui de toutes les autres s'en déduit, la concordance des signes se concluant des formules (51)

$$\frac{k^2 \operatorname{sn} a_1 \operatorname{cn} a_1 \operatorname{dn} a_1}{\operatorname{dn}^{2n_1} a_1} f'(\operatorname{dn}^2 a_1) = \frac{k^2 \operatorname{sn} a_2 \operatorname{cn} a_2 \operatorname{dn} a_2}{\operatorname{dn}^{2n_1} a_2} f'(\operatorname{dn}^2 a_2) = \ldots$$

$$\ldots = \frac{k^2 \operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i}{\operatorname{dn}^{2n_1} a_i} f'(\operatorname{dn}^2 a_i) = \ldots\ldots = \lambda.$$

L'intégrale sera ensuite donnée par la formule (14) ou l'on fait $n_2 = n_3 = 0$; elle sera par suite

$$\operatorname{dn}^{\nu} x \operatorname{cn}^{\nu_1} x \operatorname{sn}^{\nu_2} x \left[A \frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\ \ldots\ldots\ H(x-a_\beta)}{\Theta_1^{n_1}(x)\Theta^{n}(x)} e^{\frac{C}{2}x} \right.$$

$$\left. + B \frac{H(x+a_1)H(x+a_2)\ \ldots\ldots\ H(x+a_\beta)}{\Theta_1^{n_1}(x)\Theta^{n}(x)} e^{-\frac{C}{2}x} \right]$$

où l'on a, par les formules (9)

$$\frac{C}{2} = \sum_1^\beta \frac{\Theta'(a_i)}{\Theta(a_i)} = \sum_1^\beta \frac{\Theta'_1(a_i)}{\Theta_1(a_i)}$$

VII.

Nous allons maintenant mettre cette intégrale sous la même forme que pour le cas examiné en premier lieu.

Ecrivons d'abord l'intégrale de la manière suivante:

$$\operatorname{dn}^{\nu-n_1} x \operatorname{cn}^{\nu_1} x \operatorname{sn}^{\nu_2} x \left[A \frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\ \ldots\ldots\ H(x-a_\beta)}{\Theta^{\beta}(x)} e^{\frac{C}{2}x} \right.$$

$$\left. + B \frac{H(x+a_1)H(x+a_2)\ \ldots\ldots\ H(x+a_\beta)}{\Theta^{\beta}(x)} e^{-\frac{C}{2}x} \right]$$

et remarquons que la fonction doublement périodique de deuxième espèce

$$\frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\ \ldots\ldots\ H(x-a_\beta)}{\Theta^{\beta}(x)} e^{\frac{C}{2}x}$$

qui admet les multiplicateurs

$$(-1)^\beta e^{KC} \quad \text{et} \quad e^{iK'C + \frac{i\pi}{K}\sum_1^\beta a_i}$$

peut se mettre sous la forme suivante:

$$e^{\frac{\pi(\beta+1)i}{2K}x}\frac{H(x-a_1)\ldots\ldots H(x-a_\beta)H(x+\omega)}{\Theta^{\beta+1}(x)}\frac{\Theta(x)}{H(x+\omega)}e^{-\frac{\pi(\beta+1)i}{2K}x+\frac{C}{2}x}.$$

Mais si l'on prend

$$\omega=\sum_1^\beta a_i+(\beta+1)iK'$$

le 1$^{\text{er}}$ facteur sera une fonction doublement périodique de x aux périodes $2K$ et $2iK'$ et nous allons nous proposer de calculer, comme dans le cas précédent, les coefficients de cette fonction, ainsi que ω et $\frac{C}{2}$ en fonction des coefficients de $f(x)$.

La fonction doublement périodique en question pourra se mettre sous la forme suivante [1]

$$A\varphi(\mathrm{dn}^2 x)-k^2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x\,\psi(\mathrm{dn}^2 x)$$

où $\varphi(x)$ est un polynome entier en x de degré m, β étant égal à $2m$ ou à $2m-1$ et $\psi(x)$ un polynome de degré $m-1$ si $\beta=2m$ et de degré $m-2$ si $\beta=2m-1$, c'est à dire dans tous les cas de degré $\beta-m-1$.

Cette fonction devant être nulle pour $x=a_i$ on a

$$A\varphi(\mathrm{dn}^2 a_i)-k^2\,\mathrm{sn}\,a_i\,\mathrm{cn}\,a_i\,\mathrm{dn}\,a_i\,\psi(\mathrm{dn}^2 a_i)=0.$$

On tirera par suite de cette équation et des relations (51)

$$k^2\,\mathrm{sn}\,a_i\,\mathrm{cn}\,a_i\,\mathrm{dn}\,a_i=\frac{A\varphi(\mathrm{dn}^2 a_i)}{\psi(\mathrm{dn}^2 a_i)}=\frac{\lambda\,\mathrm{dn}^{2m_1}a_i}{f'(\mathrm{dn}^2 a_i)}$$

et par suite en prenant $A=\lambda$

$$\mathrm{dn}^{2m_1}a_i\psi(\mathrm{dn}^2 a_i)=\varphi(\mathrm{dn}^2 a_i)f'(\mathrm{dn}^2 a_i)$$

---

[1] Voir Cours de calcul différentiel et intégral de Lacroix tome 2, Note de M. Hermite.

et cette relation devant avoir lieu pour toute valeur de $\mathrm{dn}^2 a_i$ qui annule $f(x)$ on devra prendre

$$\mathrm{dn}^{2n_1} x\psi(\mathrm{dn}^2 x) = \varphi(\mathrm{dn}^2 x)f'(\mathrm{dn}^2 x) - f(\mathrm{dn}^2 x)\theta(\mathrm{dn}^2 x)$$

ou en remplaçant $\mathrm{dn}^2 x$ par x

$$(61) \qquad x^{n_1}\psi(x) = \varphi(x)f'(x) - \theta(x)f(x)$$

$\theta(x)$ étant un polynome entier en x de degré $m - 1$.

On voit facilement, comme dans le cas précédant, que l'on peut toujours déterminer les coefficients de $\varphi(x)$, $\theta(x)$ et $\psi(x)$ au moyen de l'équation (61).

Il suffit de remarquer que les coefficients des divers puissances de x dans les deux membres de (61) sont linéaires et homogènes par rapport aux coefficients de $\varphi(x)$, $\theta(x)$ et $\psi(x)$ et comme le second membre est dans tous les cas de degré $\beta + m - 1$ en égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres, cela fera $\beta + m$ équations, qui étant linéaires et homogènes par rapport aux $\beta + m + 1$ coefficients inconnus permettront de les calculer à un facteur près. On peut opérer de la manière suivante.

On obtiendra d'abord les coefficients de $\theta(x)$ et $\varphi(x)$ en égalant à zéro, dans le second membre les coefficients des puissances de x inférieures à n_1 et supérieures à $n_1 + \beta - m - 1$ ce qui fera $2m$ équations linéaires et homogènes par rapport aux $2m + 1$ coefficients de $\varphi(x)$ et $\theta(x)$, ne contenant pas les coefficients de $\psi(x)$. On obtiendra ensuite les coefficients des $\psi(x)$ en fonction de ceux de $\theta(x)$ et $\varphi(x)$, qui sont maintenant connus, en égalant dans les deux membres de la relation (61) les coefficients des puissances de x supérieures à $n_1 - 1$ et inférieures à $n_1 + \beta - m$ ce qui donnera bien $\beta - m$ équations.

Posons comme dans le cas précédant

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots\ldots + A_m x^m$$

$$\theta(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots\ldots + B_{m-1} x^{m-1}$$

$$\psi(x) = R_0 + R_1 x + R_2 x^2 + \ldots\ldots + R_{\beta-m-1} x^{\beta-m-1}.$$

Nos $2m$ premières équations pourront s'écrire comme il suit

$$
(n_1 \text{ équations}) \left\{
\begin{aligned}
& A_0 \alpha_{\beta-2} - B_0 \alpha_{\beta-1} = 0 \\
& 2A_0 \alpha_{\beta-3} + A_1 \alpha_{\beta-2} - B_0 \alpha_{\beta-2} - B_1 \alpha_{\beta-1} = 0 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& n_1 A_0 \alpha_{\beta-n_1-1} + (n_1 - 1) A_1 \alpha_{\beta-n_1} \ldots\ldots - B_0 \alpha_{\beta-n_1} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad - B_1 \alpha_{\beta-n_1+1} \ldots\ldots = 0
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(2m - n_1 \text{ équations}) \left\{
\begin{aligned}
& \ldots\ldots A_{m-1}(\beta + n_1 - 2m + 2)\alpha_{2m-n_1-3} \\
& \qquad + A_m(\beta + n_1 - 2m + 1)\alpha_{2m-n_1-2} - \ldots \\
& \qquad\qquad \ldots - B_{m-2}\alpha_{2m-n_1-3} - B_{m-1}\alpha_{2m-n_1-2} = 0 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \beta A_m - B_{m-1} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

On tirera de là (comme nous l'avons fait dans le cas examiné précédemment de $n_1 = n_2 = n_3 = 0$) les coefficients de $\theta(x)$ et $\varphi(x)$.

Ces coefficients étant connus on aura ensuite pour les coefficients de $\psi(x)$

$$
R_s = \sum_{i=0}^{i=m} (n_1 + s - i + 1) A_i \alpha_{n-s+i-2} - \sum_{i=0}^{i=m-1} B_i \alpha_{n-s+i-1},
$$

en convenant toujours de prendre $\alpha_i = 0$ pour $i < -1$ ou $i > \beta - 1$.

Ayant ainsi déterminé $\varphi(x)$, $\theta(x)$ et $\psi(x)$ nous aurons par un choix convenable de la constante A

$$
(62) \qquad \lambda\varphi(\mathrm{dn}^2 x) - k^2 \,\mathrm{sn}\, x \,\mathrm{cn}\, x \,\mathrm{dn}\, x \,\psi(\mathrm{dn}^2 x)
$$

$$
\Lambda e^{\frac{\pi(\beta+1)i}{2K}x} \frac{H(x - a_1) H(x - a_2) \ldots\ldots H(x - a_\beta) H(x + \omega)}{\Theta^{\beta+1}(x)}.
$$

car le 1[er] membre qui admet les zéros a_1, a_2 ..... a_β admettra aussi puisqu'il est doublement périodique aux périodes $2K$ et $2iK'$ le zéro

$$-\omega = -\left[\sum_1^\beta a_i + (\beta + 1)iK'\right],$$

puisque la somme de ses infinis $(\beta + 1)iK'$ ne doit, en vertu du théorème de M. Liouville, différer de celle des zéro que par des multiples des périodes $2K$ et $2iK'$.

En changeant x en $-x$ on aura ensuite

$$(63)\qquad \lambda\varphi(\mathrm{dn}^2 x) + k^2 \mathrm{sn}\, x \,\mathrm{cn}\, x \,\mathrm{dn}\, x \psi(\mathrm{dn}^2 x)$$

$$= (-1)^{\beta+1} A e^{-\frac{\pi(\beta+1)i}{2K}x} \frac{H(x+a_1)H(x+a_2)\ \ldots\ldots\ H(x+a_\beta)H(x-\omega)}{\Theta^{\beta+1}(x)}$$

On en déduit d'abord en faisant le produit des relations (62) et (63)

$$\lambda^2\varphi^2(\mathrm{dn}^2 x) - k^4 \mathrm{sn}^2 x \,\mathrm{cn}^2 x \,\mathrm{dn}^2 x \psi^2(\mathrm{dn}^2 x) = S(\mathrm{dn}^2 x - \mathrm{dn}^2 \omega) f(\mathrm{dn}^2 x)$$

S désignant une constante, ou en remplaçant $\mathrm{dn}^2 x$ par x

$$\lambda^2\varphi^2(x) - [-k'^2 x + (1 + k'^2)x^2 - x^3]\psi^2(x) = S(x - \mathrm{dn}^2 \omega) f(x);$$

en égalant d'abord dans les deux membres le coefficient de x et le terme constant on aura

$$(64)\qquad \left|\begin{array}{l} \lambda^2 A_0^2 = -S\,\mathrm{dn}^2 \omega\, \alpha_{\beta-1} \\ 2\lambda^2 A_0 A_1 + k'^2 R_0^2 = S(\alpha_{\beta-1} - \mathrm{dn}^2 \omega\, \alpha_{\beta-2}). \end{array}\right.$$

Égalant ensuite dans les deux membres les coefficients des puissances $(\beta + 1)$ de x

1° si $\beta = 2m$ on aura

$$(65)\qquad R_{m-1}^2 = S$$

et par suite pour ce cas les équations (64) et (65) donnent

$$(66)\qquad \mathrm{dn}^2 \omega = -\frac{\lambda^2 A_0^2}{R_{m-1}^2 \alpha_{\beta-1}} \quad \text{et} \quad \lambda^2 = \frac{\alpha_{\beta-1}}{A_0} \frac{R_{m-1}^2 \alpha_{\beta-1} - k'^2 R_0^2}{2A_1 \alpha_{\beta-1} - A_0 \alpha_{\beta-2}};$$

2° si $\beta = 2m - 1$ on aura

$$\lambda^2 A_m^2 = S \tag{67}$$

et pour ce cas on déduira des équations (64) et (67)

$$\operatorname{dn}^2 \omega = -\frac{A_0^2}{A_m^2 a_{\beta-1}} \quad \text{et} \quad \lambda^2 = \frac{k'^2 R_0^2 a_{\beta-1}}{A_0^2 a_{\beta-2} + A_m^2 a_{\beta-1}^2 - 2A_0 A_1 a_{\beta-1}}. \tag{68}$$

Les formules (66) et (68) donnent dans tous les cas les valeurs de λ et ω au signe près. On obtiendra ensuite la concordance des signes entre λ et ω en remarquant qu'en vertu de la relation (63)

$$\lambda\varphi(\operatorname{dn}^2 x) + k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \psi(\operatorname{dn}^2 x)$$

est nul pour $x = \omega$.

On a donc

$$\lambda = -k^2 \operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega \frac{\psi(\operatorname{dn}^2 \omega)}{\varphi(\operatorname{dn}^2 \omega)}$$

relation qui, le signe de ω étant pris arbitrairement, donnera celui de λ.

Il faut maintenant obtenir $\frac{C}{2}$ en fonction de ω.

On a par les formules (9)

$$\frac{C}{2} = \sum_1^{\beta} \frac{\Theta'_1(a_i)}{\Theta_1(a_i)}.$$

Si dans la relation (62) on change maintenant x en $x + K + iK'$ elle devient

$$\lambda\varphi[\operatorname{dn}^2(x + K + iK')]$$

$$- k^2 \operatorname{sn}(x + K + iK') \operatorname{cn}(x + K + iK') \operatorname{dn}(x + K + iK') \psi[\operatorname{dn}^2(x + K + iK')]$$

$$= Ae^{\frac{\pi(\beta+1)i}{2}} \cdot e^{\frac{\pi(\beta+1)i}{2K}x} \frac{\Theta_1(x - a_1)\Theta_1(x - a_2) \ldots\ldots \Theta_1(x - a_\beta)\Theta_1(x + \omega)}{H_1^{\beta+1}(x)}$$

et en prenant la dérivée logarithmique de cette expression et y faisant ensuite $x = 0$

$$-\frac{k'^2 R_0}{\lambda A_0} = \frac{\pi(\beta+1)i}{2K} - \sum_1^\beta \frac{\theta'_1(a_i)}{\theta_1(a_i)} + \frac{\theta'_1(\omega)}{\theta_1(\omega)}$$

d'où

$$\frac{C}{2} - \frac{\pi(\beta+1)i}{2K} = \frac{\theta'_1(\omega)}{\theta_1(\omega)} + \frac{k'^2 R_0}{\lambda A_0}.$$

On aura donc enfin pour l'intégrale cherchée

$$\begin{aligned}\mathrm{dn}^{\nu-n_1} x \,\mathrm{cn}^{\nu_1} x \,\mathrm{sn}^{\nu_2} x \Bigg[& A[\lambda\varphi(\mathrm{dn}^2 x) - k^2 \mathrm{sn}\, x \,\mathrm{cn}\, x \,\mathrm{dn}\, x \psi(\mathrm{dn}^2 x)] \\ & \times \frac{\Theta(x)}{H(x+\omega)} e^{\left[\frac{\theta'_1(\omega)}{\theta_1(\omega)} + \frac{k'^2 R_0}{\lambda A_0}\right] x} \\ + B[\lambda\varphi(\mathrm{dn}^2 x) + k^2 \mathrm{sn}\, x \,\mathrm{cn}\, x \,\mathrm{dn}\, x \psi(\mathrm{dn}^2 x)] & \frac{\Theta(x)}{H(x-\omega)} e^{-\left[\frac{\theta'_1(\omega)}{\theta_1(\omega)} + \frac{k'^2 R_0}{\lambda A_0}\right] x} \Bigg],\end{aligned}$$

toutes les quantités qui figurent dans cette intégrale se calculant comme nous l'avons dit en fonction des données n, n_1, ν, ν_1, ν_2 et h.

VIII.

Revenons maintenant au cas général où n, n_1, n_2, n_3 sont tous quatres différents de zéro, et posons

$$\mathrm{sn}^2 a_i = x_i, \quad \mathrm{sn}\, a_i \,\mathrm{cn}\, a_i \,\mathrm{dn}\, a_i = u_i .$$

Les équations (10) et (12) deviendront

$$\sum_1^\beta \frac{u_i}{x_i} = 0, \quad \sum_1^\beta \frac{u_i}{1 - x_i} = 0, \quad \sum_1^\beta \frac{u_i}{1 - k^2 x_i} = 0$$

$$\sum_1^\beta u_i = 0, \quad \sum_1^\beta u_i x_i = 0, \quad \ldots\ldots \quad \sum_1^\beta u_i x_i^{n-2} = 0$$

$$\sum_1^\beta \frac{u_i}{(1 - k^2 x_i)^2} = 0, \quad \sum_1^\beta \frac{(1 - x_i) u_i}{(1 - k^2 x_i)^3} = 0, \quad \ldots\ldots \quad \sum_1^\beta \frac{(1 - x_i)^{n_1 - 2} u_i}{(1 - k^2 x_i)^{n_1}} = 0$$

$$\sum_1^\beta \frac{u_i}{(1 - x_i)^2} = 0, \quad \sum_1^\beta \frac{(1 - k^2 x_i) u_i}{(1 - x_i)^3} = 0, \quad \ldots\ldots \quad \sum_1^\beta \frac{(1 - k^2 x_i)^{n_2 - 2} u_i}{(1 - x_i)^{n_2}} = 0$$

$$\sum_1^\beta \frac{u_i}{x_i^2} = 0, \quad \sum_1^\beta \frac{u_i}{x_i^3} = 0, \quad \ldots\ldots \quad \sum_1^\beta \frac{u_i}{x_i^{n_3}} = 0.$$

En résolvant ces $\beta - 1$ équations par rapport aux β quantités u_i, ce qui est possible puisqu'elles sont homogènes par rapport à ces quantités

on aura

$$
\frac{u_1}{\left|\begin{array}{ccc}
1 & \ldots\ldots & 1 \\
x_2 & \ldots\ldots & x_\beta \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
x_2^{n-2} & \ldots\ldots & x_\beta^{n-2} \\
\dfrac{1}{1-k^2x_2} & \ldots\ldots & \dfrac{1}{1-k^2x_\beta} \\
\dfrac{1}{(1-k^2x_2)^2} & \ldots\ldots & \dfrac{1}{(1-k^2x_\beta)^2} \\
\dfrac{1-x_2}{(1-k^2x_2)^3} & \ldots\ldots & \dfrac{1-x_\beta}{(1-k^2x_\beta)^3} \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\dfrac{(1-x_2)^{n_1-2}}{(1-k^2x_2)^{n_1}} & \ldots\ldots & \dfrac{(1-x_\beta)^{n_1-2}}{(1-k^2x_\beta)^{n_1}} \\
\dfrac{1}{1-x_2} & \ldots\ldots & \dfrac{1}{1-x_\beta} \\
\dfrac{1}{(1-x_2)^2} & \ldots\ldots & \dfrac{1}{(1-x_\beta)^2} \\
\dfrac{1-k^2x_2}{(1-x_2)^3} & \ldots\ldots & \dfrac{1-k^2x_\beta}{(1-x_\beta)^3} \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\dfrac{(1-k^2x_2)^{n_2-2}}{(1-x_2)^{n_2}} & \ldots\ldots & \dfrac{(1-k^2x_\beta)^{n_2-2}}{(1-x_\beta)^{n_2}} \\
\dfrac{1}{x_2} & \ldots & \dfrac{1}{x_\beta} \\
\dfrac{1}{x_2^2} & \ldots\ldots & \dfrac{1}{x_\beta^2} \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\dfrac{1}{x_2^{n_3}} & \ldots\ldots & \dfrac{1}{x_\beta^{n_3}}
\end{array}\right|}
=
\frac{-u_2}{\left|\begin{array}{c}
\ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots
\end{array}\right|}
= \ldots\ldots
$$

Mais on peut transformer ces équations de façon à les mettre sous une forme beaucoup plus simple.

Multiplions d'abord les dénominateurs de tous les rapports précédants par $(1 - k^2 x_1)^{n_1}(1 - k^2 x_2)^{n_1} \ldots \ldots (1 - k^2 x_\beta)^{n_1}(1 - x_1)^{n_2}(1 - x_2)^{n_2} \ldots \ldots (1 - x_\beta)^{n_2} x_1^{n_3} x_2^{n_3} \ldots \ldots x_\beta^{n_3}$.

Nos rapports prendront la forme suivante

$$
\frac{u_1}{
\begin{array}{l|l|}
(1 - k^2 x_1)^{n_1}(1 - x_1)^{n_2} x_1^{n_3} & (1 - k^2 x_2)^{n_1}(1 - x_2)^{n_2} x_2^{n_3} \ldots\ldots \\
 & (1 - k^2 x_2)^{n_1}(1 - x_2)^{n_2} x_2^{n_3+1} \ldots\ldots \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & (1 - k^2 x_2)^{n_1}(1 - x_2)^{n_2} x_2^{n_3+n-2} \ldots\ldots \\
 & (1 - k^2 x_2)^{n_1-1}(1 - x_2)^{n_2} x_2^{n_3} \ldots\ldots \\
 & (1 - k^2 x_2)^{n_1-2}(1 - x_2)^{n_2} x_2^{n_3} \ldots\ldots \\
 & (1 - k^2 x_2)^{n_1-3}(1 - x_2)^{n_2+1} x_2^{n_3} \ldots\ldots \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & (1 - x_2)^{n_1+n_2-2} x_2^{n_3} \ldots\ldots \\
 & (1 - k^2 x_2)^{n_1}(1 - x_2)^{n_2-1} x_2^{n_3} \ldots\ldots \\
 & (1 - k^2 x_2)^{n_1}(1 - x_2)^{n_2-2} x_2^{n_3} \ldots\ldots \\
 & (1 - k^2 x_2)^{n_1+1}(1 - x_2)^{n_2-3} x_2^{n_3} \ldots\ldots \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & (1 - k^2 x_2)^{n_1+n_2-2} x_2^{n_3} \ldots\ldots \\
 & (1 - k^2 x_2)^{n_1}(1 - x_2)^{n_2} x_2^{n_3-1} \ldots\ldots \\
 & (1 - k^2 x_2)^{n_1}(1 - x_2)^{n_2} x_2^{n_3-2} \ldots\ldots \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & (1 - k^2 x_2)^{n_1}(1 - x_2)^{n_2} \ldots\ldots
\end{array}
} = \ldots\ldots
$$

Mais nous remarquerons que le déterminant

$$
\left|
\begin{array}{lcl}
(1-k^2x_2)^{n_1}(1-x_2)^{n_2}x_2^{n_3} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1}(1-x_\beta)^{n_2}x_\beta^{n_3} \\
(1-k^2x_2)^{n_1}(1-x_2)^{n_2}x_2^{n_3+1} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1}(1-x_\beta)^{n_2}x_\beta^{n_3+1} \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
(1-k^2x_2)^{n_1}(1-x_2)^{n_2}x_2^{n_3+n-2} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1}(1-x_\beta)^{n_2}x_\beta^{n_3+n-2} \\
(1-k^2x_2)^{n_1-1}(1-x_2)^{n_2}x_2^{n_3} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1-1}(1-x_\beta)^{n_2}x_\beta^{n_3} \\
(1-k^2x_2)^{n_1-2}(1-x_2)^{n_2}x_2^{n_3} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1-2}(1-x_\beta)^{n_2}x_\beta^{n_3} \\
(1-k^2x_2)^{n_1-3}(1-x_2)^{n_2+1}x_2^{n_3} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1-3}(1-x_\beta)^{n_2+1}x_\beta^{n_3} \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
(1-x_2)^{n_2+n_1-2}x_2^{n_3} & \dots\dots & (1-x_\beta)^{n_1+n_2-2}x_\beta^{n_3} \\
(1-k^2x_2)^{n_1}(1-x_2)^{n_2-1}x_2^{n_3} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1}(1-x_\beta)^{n_2-1}x_\beta^{n_3} \\
(1-k^2x_2)^{n_1}(1-x_2)^{n_2-2}x_2^{n_3} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1}(1-x_\beta)^{n_2-2}x_\beta^{n_3} \\
(1-k^2x_2)^{n_1+1}(1-x_2)^{n_2-3}x_2^{n_3} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1+1}(1-x_\beta)^{n_2-3}x_\beta^{n_3} \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
(1-k^2x_2)^{n_1+n_2-2}x_2^{n_3} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1+n_2-2}x_\beta^{n_3} \\
(1-k^2x_2)^{n_1}(1-x_2)^{n_2}x_2^{n_3-1} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1}(1-x_\beta)^{n_2}x_\beta^{n_3-1} \\
(1-k^2x_2)^{n_1}(1-x_2)^{n_2}x_2^{n_3-2} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1}(1-x_\beta)^{n_2}x_\beta^{n_3-2} \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
(1-k^2x_2)^{n_1}(1-x_2)^{n_2} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1}(1-x_\beta)^{n_2}
\end{array}
\right|
$$

est égal au déterminant

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_2 & x_3 & \ldots\ldots & x_\beta \\ x_2^2 & x_3^2 & \ldots\ldots & x_\beta^2 \\ x_2^3 & x_3^3 & \ldots\ldots & x_\beta^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_2^{\beta-2} & x_3^{\beta-2} & \ldots\ldots & x_\beta^{\beta-2} \end{vmatrix}$$

multiplié par un facteur constant.

En effet si l'on développait chaque élément du premier déterminant, on verrait que ces éléments sont des fonctions entières de l'une des quantités x_2, x_3, ... x_β de degré $\beta - 2$ au plus, et que, dans une même ligne on passe de l'élément de la 1ère colonne à celui de l'une quelconque des autres en remplaçant x_2 par l'une des quantités x_3, x_4, ... x_β, les coefficients restant les mêmes. Chaque ligne du premier déterminant peut donc être formée par l'addition de plusieurs lignes du déterminant $\varDelta_1$ multipliées au préalable par des facteurs constants convenablement choisis. Il résulte de là que le premier déterminant est égal à $\varDelta_1$ multiplié par un facteur constant.

Ce que nous venons de dire pour le dénominateur de u_1 s'appliquant à celui de l'une quelconque des quantités u on aura pour nos équations

$$\frac{u_1}{x_1^{n_3}(1-x_1)^{n_2}(1-k^2x_1)^{n_1}\varDelta_1} = \frac{-u_2}{x_2^{n_3}(1-x_2)^{n_2}(1-k^2x_2)^{n_1}\varDelta_2} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{(-1)^{i-1}u_i}{x_i^{n_3}(1-x_i)^{n_2}(1-k^2x_i)^{n_1}\varDelta_i} = \ldots$$

où

$$\varDelta_i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_{i-1} & x_{i+1} & \ldots\ldots & x_\beta \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots\ldots & x_{i-1}^2 & x_{i+1}^2 & \ldots\ldots & x_\beta^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{\beta-2} & x_2^{\beta-2} & \ldots\ldots & x_{i-1}^{\beta-2} & x_{i+1}^{\beta-2} & \ldots\ldots & x_\beta^{\beta-2} \end{vmatrix}.$$

Mais si l'on pose comme précédemment:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_\beta)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_\beta \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots\ldots & x_\beta^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{\beta-1} & x_2^{\beta-1} & \ldots\ldots & x_\beta^{\beta-1} \end{vmatrix}$$

on en déduira au moyen du théorème de VANDERMONDE

$$\Delta = (-1)^{\beta-1}\Delta_1 f'(x_1) = (-1)^{\beta-2}\Delta_2 f'(x_2) = \ldots\ldots = (-1)^{\beta-i}\Delta_i f'(x_i) = \ldots$$
$$\ldots = \Delta_\beta f'(x_\beta)$$

de sorte que nos équations deviendront

$$\frac{u_1 f'(x_1)}{x_1^{n_3}(1 - x_1)^{n_2}(1 - k^2 x_1)^{n_1}} = \frac{u_2 f'(x_2)}{x_2^{n_3}(1 - x_2)^{n_2}(1 - k^2 x_2)^{n_1}} = \ldots$$
$$\ldots = \frac{u_i f'(x_i)}{x_i^{n_3}(1 - x_i)^{n_2}(1 - k^2 x_i)^{n_1}} = \ldots\ldots = \lambda$$

en désignant par λ la valeur commune de ces rapports. Mais ces équations peuvent s'écrire

$$(69) \qquad \frac{f'(\mathrm{sn}^2 a_1)}{\mathrm{sn}^{2n_3-1} a_1 \,\mathrm{cn}^{2n_2-1} a_1 \,\mathrm{dn}^{2n_1-1} a_1} = \frac{f'(\mathrm{sn}^2 a_2)}{\mathrm{sn}^{2n_3-1} a_2 \,\mathrm{cn}^{2n_2-1} a_2 \,\mathrm{dn}^{2n_1-1} a_2} = \ldots$$
$$= \ldots \frac{f'(\mathrm{sn}^2 a_i)}{\mathrm{sn}^{2n_3-1} a_i \,\mathrm{cn}^{2n_2-1} a_i \,\mathrm{dn}^{2n_1-1} a_i} = \ldots\ldots = \lambda;$$

en les élévant au carré on pourra les écrire

$$\frac{f'^2(x_1)}{x_1^{2n_3-1}(1 - x_1)^{2n_2-1}(1 - k^2 x_1)^{2n_1-1}} = \frac{f'^2(x_2)}{x_2^{2n_3-1}(1 - x_2)^{2n_2-1}(1 - k^2 x_2)^{2n_1-1}} = \ldots$$
$$\ldots = \frac{f'^2(x_i)}{x_i^{2n_3-1}(1 - x_i)^{2n_2-1}(1 - k^2 x_i)^{2n_1-1}} = \ldots\ldots = \lambda^2.$$

Il résulte de cette dernière relation que l'équation

$$(70)\qquad \frac{f'^2(x)}{x^{2n_3-1}(1-x)^{2n_2-1}(1-k^2x)^{2n_1-1}}-\lambda^2=0$$

admet toutes les racines de l'équation $f(x)=0$.

Cette remarque nous servira comme dans les cas précédants à calculer les coefficients de $f(x)$.

Soit toujours

$$f(x)=x^\beta+\alpha_0x^{\beta-1}+\ldots\ldots+\alpha_{\beta-2}x+\alpha_{\beta-1}$$

c'est à dire

$$f(x)=\sum_0^\beta \alpha_{i-1}x^{\beta-i}$$

on aura d'abord en vertu de la $1^{\text{ère}}$ des relations (13)

$$\alpha_0=-\sum_1^\beta \operatorname{sn}^2 a_i$$

$$-\frac{(\nu_1+\nu_2+n+n_1)(\nu_1+\nu_2-n-n_1)+k^2(\nu+\nu_2+n+n_2)(\nu+\nu_2-n-n_2)-h}{(2n-1)k^2}.$$

On pourrait en partant de la relation (70) opérer comme nous l'avons fait dans les cas précédants, mais la relation entre les coefficients α serait beaucoup plus compliquée car elle comprendrait cinq coefficients consécutifs. Nous procéderons par suite d'une façon un peu différente.

L'équation (70) admettant toutes les racines de $f(x)=0$, il en sera de même de l'équation suivante:

$$f'^2(x)-\lambda^2x^{2n_3-1}(1-x)^{2n_2-1}(1-k^2x)^{2n_1-1}=0$$

et comme le premier membre de cette dernière équation est entier, on aura en désignant par $f_1(x)$ une fonction entière de x de degré $\beta-2$

$$(71)\qquad f'^2(x)-\lambda^2x^{2n_3-1}(1-x)^{2n_2-1}(1-k^2x)^{2n_1-1}=f(x)f_1(x).$$

Prenons la dérivée de cette équation nous aurons

$$2f'(x)f''(x) - \lambda^2\{2n_3 - 1 - 2[n_3 + n_2 - 1 + k^2(n_3 + n_1 - 1)]x$$
$$+ (2n_3 + 2n_2 + 2n_1 - 3)k^2x^2\}x^{2n_3-2}(1 - x)^{2n_2-2}(1 - k^2x)^{2n_1-2}$$
$$= f'(x)f_1(x) + f(x)f_1'(x);$$

éliminons λ^2 entre cette équation et la précédante nous pourrons écrire le résultat de la manière suivante:

$$f'(x)\Big[2x(1 - x)(1 - k^2x)f''(x) - \{2n_3 - 1 - 2[n_3 + n_2 - 1 + k^2(n_3 + n_1 - 1)]x$$
$$+ (2n_3 + 2n_2 + 2n_1 - 3)k^2x^2\}f'(x) - x(1 - x)(1 - k^2x)f_1(x)\Big]$$
$$= f(x)\Big[x(1 - x)(1 - k^2x)f_1'(x) - \{2n_3 - 1 - 2[n_3 + n_2 - 1 + k^2(n_3 + n_1 - 1)]x$$
$$+ (2n_3 + 2n_2 + 2n_1 - 3)k^2x^2\}f_1(x)\Big];$$

mais $f(x)$ étant premier avec $f'(x)$ puisque toutes les racines de $f(x) = 0$ sont distinctes on devra avoir

$$x(1 - x)(1 - k^2x)f_1'(x) - \{2n_3 - 1 - 2[n_3 + n_2 - 1 + k^2(n_3 + n_1 - 1)]x$$
$$+ (2n_3 + 2n_2 + 2n_1 - 3)k^2x^2\}f_1(x) = (Ax + B)f'(x)$$

A et B étant des constantes puisque le premier membre est de degré β et qu'il doit en être de même du second.

On en déduit ensuite

$$2x(1 - x)(1 - k^2x)f''(x) - \{2n_3 - 1 - 2[n_3 + n_2 - 1 + k^2(n_3 + n_1 - 1)]x$$
$$+ (2n_3 + 2n_2 + 2n_1 - 3)k^2x^2\}f'(x) - x(1 - x)(1 - k^2x)f_1(x) = (Ax + B)f(x).$$

Soit

$$f_1(x) = \sum_2^\beta \mu_{i-2}x^{\beta-i}$$

en convenant toujours, dans ce qui suivra, que $\mu_i = 0$ pour $i < 0$ ou $i > \beta - 2$.

On trouvera d'abord en égalant entre eux les premiers coefficients de x dans les deux relations précédantes

$$A = -k^2\beta(\beta - 2n - 1)$$

$$B = -\beta[(n - n_3)(1 + k^2) + (n_1 - n_2)k'^2] - k^2\alpha_0(2n - 1).$$

Ensuite en égalant dans les deux membres de la 1ère relation les coefficients de $x^{\beta-i-1}$ et remplaçant A et B par leurs valeurs on a

$$(72)\quad \left|\begin{aligned} &(\beta - 2n_3 - i)\mu_{i-1} + [(n_3 - n + i)(1 + k^2) + (n_2 - n_1)k'^2]\mu_i \\ &\quad - k^2(\beta - 2n + i)\mu_{i+1} + k^2\beta(\beta - 2n - 1)(\beta - i - 1)\alpha_i \\ &+ \{\beta[(n - n_3)(1 + k^2) + (n_1 - n_2)k'^2] + k^2(2n - 1)\alpha_0\}(\beta - i)\alpha_{i-1} = 0. \end{aligned}\right.$$

Puis égalant dans les deux membres de la 2de relation les coefficients de $x^{\beta-i}$ et remplaçant A et B par leurs valeurs on a

$$(73)\quad \left|\begin{aligned} &k^2\alpha_i[\beta(\beta - 2i - 2) - (i + 1)(2n - 2i - 1)] + \alpha_{i-1}\{-\beta(\beta - 2i)(1 + k^2) \\ &\quad + 2i[n + n_1 - i + k^2(n + n_2 - i)] + (2n - 1)k^2\alpha_0\} \\ &+ \alpha_{i-2}(\beta - i + 1)(2\beta - 2i - 2n_3 + 1) - \mu_{i-1} + (1 + k^2)\mu_i - k^2\mu_{i+1} = 0. \end{aligned}\right.$$

En éliminant ensuite μ_{i+1} entre ces deux relations on en déduit

$$(74)\quad \left|\begin{aligned} &2(n_1 + n_2)\mu_{i-1} - 2(n_1 + n_2k^2)\mu_i - k^2(i + 1)(2n - 2i - 1)(2n - i)\alpha_i \\ &\quad + 2\{(2n - 1)(n - i)k^2\alpha_0 + \beta(\beta - 2i)(n_1 + n_2k^2) \\ &\quad + i(2n - i)[(n - i)(1 + k^2) + n_1 + n_2k^2]\}\alpha_{i-1} \\ &\quad - (\beta - 2n + i)(\beta - i + 1)(2\beta - 2n_3 - 2i + 1)\alpha_{i-2} = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation lorsqu'on y suppose $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ (et par suite $\beta = n$) donne l'équation (23) de la page 128.

On calculera ensuite les coefficients α et μ de la manière suivante.

En faisant d'abord $i = -1$ et $i = 0$ l'une des équations (72) ou (73) donnera μ_0 et μ_1. Cela fait en faisant $i = 1$ dans (74) on aura α_1. α_1 étant connu la formule (73), par exemple, donnera en y faisant $i = 1$

μ_2, on obtiendra ensuite α_2 au moyen de la formule (74) où l'on fera $i = 2$, et ainsi de suite.

D'une façon générale si l'on connaît $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$ et $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_s$, la formule (73) donnera μ_{s+1} en y faisant $i = s$ et μ_{s+1} étant connu la formule (74) donnera α_{s+1} en y faisant $i = s + 1$.

Nous obtiendrons donc de la sorte tous les coefficients μ et α.

Il y a toutefois lieu de faire une remarque pour le cas où $\beta > 2n + 1$, car en faisant $i = 2n$ on n'obtiendra pas la valeur de α_{2n} et en donnant à i cette valeur dans (74) cette relation, qui a lieu entre des quantités déjà connues, devra se reduire à une identité.

On opérera dans ce cas de la manière suivante.

On calculera les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-1}$ et $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{2n}$ en fonction de α_0 au moyen des équations (73) et (74) comme nous l'avons indiqué. On calculera ensuite les coefficients $\alpha_{2n+1}, \alpha_{2n+2}, \ldots \alpha_{\beta-1}$ et $\mu_{2n+1}, \mu_{2n+2}, \ldots \mu_{\beta-2}$ en fonction de α_0 et α_{2n} au moyen des mêmes équations où l'on donne à i les valeurs $2n$, $2n + 1, \ldots \beta - 1$ dans (73) et $2n + 1, \ldots \beta - 1$ dans (74). Les expressions que l'on obtiendra ainsi seront toutes linéaires par rapport à α_{2n}. En faisant ensuite $i = \beta$ dans (73) ou (74) on obtient la relation

$$(75)\quad \left|\begin{aligned} &\alpha_{\beta-1}\{\beta[(n - n_3)(1 + k^2) + (n_1 - n_2)k'^2] + (2n - 1)k^2\alpha_0\} \\ &\qquad - (2n_3 - 1)\alpha_{\beta-2} = 0 \end{aligned}\right.$$

et $\alpha_{\beta-1}$ et $\alpha_{\beta-2}$ étant linéaires par rapport à α_{2n} cette relation fera connaître cette dernière quantité.

L'équation qui admet pour racines $\mathrm{sn}^2 a_1$, $\mathrm{sn}^2 a_2 \ldots \mathrm{sn}^2 a_\beta$ étant ainsi connue, la concordance des signes entre les quantités $a_1, a_2, \ldots a_\beta$ sera fournie par les relations (69)

$$\frac{f'(\mathrm{sn}^2 a_1)}{\mathrm{sn}^{2n_3-1} a_1 \,\mathrm{cn}^{2n_2-1} a_1 \,\mathrm{dn}^{2n_1-1} a_1} = \ldots = \frac{f'(\mathrm{sn}^2 a_i)}{\mathrm{sn}^{2n_3-1} a_i \,\mathrm{cn}^{2n_2-1} a_i \,\mathrm{dn}^{2n_1-1} a_i} = \ldots = \lambda,$$

qui lorsque le signe de a_1 aura été choisi arbitrairement fera connaître celui de toutes les autres quantités.

L'intégrale générale sera donnée ensuite par la formule (14)

$$\mathrm{dn}^{\nu} x\, \mathrm{cn}^{\nu_1} x\, \mathrm{sn}^{\nu_2} x \left[A \frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\ \ldots\ldots\ H(x-a_\beta)}{H^{n_3}(x)H_1^{n_2}(x)\Theta_1^{n_1}(x)\Theta^{n}(x)} e^{\frac{C}{2}x} \right.$$

$$\left. + B \frac{H(x+a_1)H(x+a_2)\ \ldots\ldots\ H(x+a_\beta)}{H^{n_3}(x)H_1^{n_2}(x)\Theta_1^{n_1}(x)\Theta^{n}(x)} e^{-\frac{C}{2}x} \right]$$

où $\frac{C}{2}$ est donné par les formules (9)

$$\frac{C}{2} = \sum_1^\beta \frac{\Theta'(a_i)}{\Theta(a_i)} = \sum_1^\beta \frac{\Theta'_1(a_i)}{\Theta_1(a_i)} = \sum_1^\beta \frac{H'_1(a_i)}{H_1(a_i)} = \sum_1^\beta \frac{H'(a_i)}{H(a_i)}.$$

IX.

Nous allons maintenant mettre le résultat sous la même forme que dans les deux cas particuliers que nous avons déjà examinés.

Pour cela nous écrirons d'abord l'intégrale de la manière suivante.

$$(76)\qquad \mathrm{dn}^{\nu-n_1} x\, \mathrm{cn}^{\nu_1-n_2} x\, \mathrm{sn}^{\nu_2-n_3} x \left[A \frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\ \ldots\ldots\ H(x-a_\beta)}{\Theta^\beta(x)} e^{\frac{C}{2}x} \right.$$

$$\left. + B \frac{H(x+a_1)H(x+a_2)\ \ldots\ldots\ H(x+a_\beta)}{\Theta^\beta(x)} e^{-\frac{C}{2}x} \right]$$

et nous remarquerons que la fonction doublement périodique de 2^{de} espèce

$$\frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\ \ldots\ldots\ H(x-a_\beta)}{\Theta^\beta(x)} e^{\frac{C}{2}x}$$

qui admet les multiplicateurs

$$(-1)^{\beta} e^{KC} \quad \text{et} \quad e^{iK'C + \frac{i\pi}{K}\sum_1^{\beta} a_i}$$

peut se mettre sous la forme suivante

$$e^{\frac{\pi(\beta+1)i}{2K}x} \frac{H(x-a_1) \ldots\ldots H(x-a_\beta) H(x+\omega)}{\Theta^{\beta+1}(x)} \frac{\Theta(x)}{H(x+\omega)} e^{-\frac{\pi(\beta+1)i}{2K}x + \frac{Cx}{2}}.$$

Mais si l'on prend

$$\omega = \sum a_i + (\beta + 1)iK'$$

le premier facteur

$$e^{\frac{\pi(\beta+1)i}{2K}x} \frac{H(x-a_1) \ldots\ldots H(x-a_\beta) H(x+\omega)}{\Theta^{\beta+1}(x)}$$

sera une fonction doublement périodique ordinaire de x.

Cette fonction doublement périodique d'ordre $(\beta + 1)$ peut se mettre sous la forme

$$A\varphi(\mathrm{sn}^2 x) - \mathrm{sn}\, x\, \mathrm{cn}\, x\, \mathrm{dn}\, x\, \psi(\mathrm{sn}^2 x) \tag{77}$$

(voir traité de Lacroix note de M. Hermite) $\varphi(x)$ étant un polynome entier en x de degré m, si β est égal à $2m$ ou à $2m - 1$, et $\psi(x)$ un polynome entier en x de degré $m - 1$, si $\beta = 2m$ et de degré $m - 2$, si $\beta = 2m - 1$ ($\psi(x)$ est donc dans tous les cas de degré $\beta - m - 1$).

Cette fonction devant être nulle pour $x = a_i$ on aura

$$A\varphi(\mathrm{sn}^2 a_i) - \mathrm{sn}\, a_i\, \mathrm{cn}\, a_i\, \mathrm{dn}\, a_i\, \psi(\mathrm{sn}^2 a_i) = 0$$

d'où

$$\mathrm{sn}\, a_i\, \mathrm{cn}\, a_i\, \mathrm{dn}\, a_i = \frac{A\varphi(\mathrm{sn}^2 a_i)}{\psi(\mathrm{sn}^2 a_i)}.$$

Mais on a aussi en vertu des relations (69)

$$\mathrm{sn}\, a_i\, \mathrm{cn}\, a_i\, \mathrm{dn}\, a_i = \frac{\lambda\, \mathrm{sn}^{2n_3} a_i\, \mathrm{cn}^{2n_2} a_i\, \mathrm{dn}^{2n_1} a_i}{f'(\mathrm{sn}^2 a_i)}$$

et par suite en prenant A, qui est arbitraire, égal à λ on aura

$$\mathrm{sn}^{2n_3} a_i \,\mathrm{cn}^{2n_2} a_i \,\mathrm{dn}^{2n_1} a_i \psi(\mathrm{sn}^2 a_i) = \varphi(\mathrm{sn}^2 a_i) f'(\mathrm{sn}^2 a_i)$$

et cette relation devant avoir lieu pour toutes les valeurs de $\mathrm{sn}^2 a$ qui annulent $f(x)$ on est conduit à poser

$$\mathrm{sn}^{2n_3} x \,\mathrm{cn}^{2n_2} x \,\mathrm{dn}^{2n_1} x \psi(\mathrm{sn}^2 x) = \varphi(\mathrm{sn}^2 x) f'(\mathrm{sn}^2 x) - f(\mathrm{sn}^2 x)\theta(\mathrm{sn}^2 x)$$

$\theta(x)$ étant une fonction entière de x de degré $m - 1$.

Si nous remplaçons maintenant $\mathrm{sn}^2 x$ par x cette relation deviendra

$$x^{n_3}(1 - x)^{n_2}(1 - k^2 x)^{n_1}\psi(x) = \varphi(x) f'(x) - f(x)\theta(x). \tag{78}$$

Soit

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + \ldots\ldots + A_m x^m$$

$$\theta(x) = B_0 + B_1 x + \ldots\ldots + B_{m-1} x^{m-1}$$

$$\psi(x) = R_0 + R_1 x + \ldots\ldots + R_{\beta-m-1} x^{\beta-m-1}.$$

On va voir qu'on peut toujours déterminer au moyen de la relation (78) les coefficients de $\varphi(x)$, $\theta(x)$ et $\psi(x)$.

En effet les quantités $A_0 A_1 \ldots\ldots B_0 B_1 \ldots\ldots R_0 R_1 \ldots\ldots$ entrent toutes linéairement dans les coefficients de x dans les deux membres de (78). En égalant donc, dans les deux membres de cette relation les coefficients des mêmes puissances de x, on aura (puisque le second membre est dans tous les cas de degré $m + \beta - 1$ et le premier d'un degré au plus égal) $m + \beta$ équations qui permettront de déterminer à un facteur constant près, les $m + \beta + 1$ coefficients de $\varphi(x)$, $\theta(x)$ et $\psi(x)$ puisque ces équations sont linéaires et homogènes par rapport à ces quantités.

Parmi ces $m + \beta$ équations, on en obtiendra d'abord n_3 en égalant à zéro dans le second membre de (78) les coefficients des puissances de x inférieures à n_3, et ensuite $2m + n - \beta$ en égalant à zéro, dans le même second membre les coefficients des puissances de x supérieures à $2\beta - m - n - 1$, nous aurons de la sorte $2m - n_1 - n_2$ équations qui ne contiendront pas les coefficients R de $\psi(x)$.

Les coefficients des fonctions φ, θ et ψ étant ainsi déterminés, nous aurons avec un choix convenable de la constante A

$$
(79)\quad \left|\begin{aligned}
&\lambda\varphi(\mathrm{sn}^2 x) - \mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x\,\psi(\mathrm{sn}^2 x)\\
&= A e^{\frac{\pi(\beta+1)i}{2K}x}\,\frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\,\ldots\ldots\,H(x-a_\beta)H(x+\omega)}{\theta^{\beta+1}(x)}
\end{aligned}\right.
$$

car le premier membre qui admet les zéros a_1, a_2, ... a_β admettra aussi en vertu du théorème de M. Liouville le zéro

$$-\omega = -\left[\sum_1^\beta a_i + (\beta+1)iK'\right]$$

puisqu'il est doublement périodique aux périodes $2K$ et $2iK'$ et que la somme de ces infinis $(\beta+1)iK'$.

En changeant x en $-x$ on aura ensuite

$$
(80)\quad \left|\begin{aligned}
&\lambda\varphi(\mathrm{sn}^2 x) + \mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x\,\psi(\mathrm{sn}^2 x)\\
&= (-1)^{\beta+1} e^{-\frac{\pi(\beta+1)i}{2K}x}\,\frac{H(x+a_1)H(x+a_2)\,\ldots\ldots\,H(x+a_\beta)H(x-\omega)}{\theta^{\beta+1}(x)}.
\end{aligned}\right.
$$

On en déduit d'abord en faisant le produit des deux équations (79) et (80), et désignant par S une constante

$$\lambda^2\varphi^2(\mathrm{sn}^2 x) - \mathrm{sn}^2 x\,\mathrm{cn}^2 x\,\mathrm{dn}^2 x\,\psi^2(\mathrm{sn}^2 x) = S(\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2\omega)f(\mathrm{sn}^2 x)$$

et en remplaçant $\mathrm{sn}^2 x$ par x cette relation deviendra

$$(81)\qquad \lambda^2\varphi^2(x) - x(1-x)(1-k^2x)\psi^2(x) = S(x-\mathrm{sn}^2\omega)f(x).$$

En égalant d'abord dans les deux membres de cette relation les coefficients de x et les termes constants on aura

$$
(82)\quad \left|\begin{aligned}
&\lambda^2 A_0^2 = -S\,\mathrm{sn}^2\omega\,\alpha_{\beta-1}\\
&2\lambda^2 A_0 A_1 - B_0^2 = S(\alpha_{\beta-1} - \mathrm{sn}^2\omega\,\alpha_{\beta-2}).
\end{aligned}\right.
$$

Egalant ensuite dans les deux membres de (81) les coefficients des puissances $(\beta + 1)$ de x,

1° si $\beta = 2m$ on aura

$$-k^2 R_{m-1}^2 = S \tag{83}$$

et les équations (82) et (83) donneront

$$\operatorname{sn}^2 \omega = \frac{\lambda^2 A_0^2}{k^2 R_{m-1}^2 a_{\beta-1}} \quad \text{et} \quad \lambda^2 = \frac{a_{\beta-1}(R_0^2 - k^2 R_{m-1}^2 a_{\beta-1})}{A_0(2A_1 a_{\beta-1} - A_0 a_{\beta-2})}; \tag{84}$$

2° si $\beta = 2m - 1$ on aura

$$\lambda^2 A_m^2 = S \tag{85}$$

et des équations (82) et (85) on déduit pour ce cas

$$\operatorname{sn}^2 \omega = -\frac{A_0^2}{A_m^2 a_{\beta-1}} \quad \text{et} \quad \lambda^2 = \frac{R_0^2 a_{\beta-1}}{2A_0 A_1 a_{\beta-1} - A_m^2 a_{\beta-1}^2 - A_0^2 a_{\beta-2}}. \tag{86}$$

Les formules (84) et (86) permettront donc d'obtenir dans tous les cas les valeurs de λ et ω au signe près.

On obtiendra ensuite la concordance des signes entre λ et ω en remarquant que l'équation (79) nous fait voir que

$$\lambda \varphi(\operatorname{sn}^2 x) - \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \, \psi(\operatorname{sn}^2 x)$$

est nul pour $x = -\omega$.

On doit donc avoir

$$\lambda = -\frac{\operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega \, \psi(\operatorname{sn}^2 \omega)}{\varphi(\operatorname{sn}^2 \omega)}. \tag{87}$$

Il nous reste maintenant à obtenir l'expression de $\frac{C}{2}$ en fonction des coefficients connus et de ω.

Or on a par l'une des formules (9)

$$\frac{C}{2} = \sum_1^{\nu} \frac{H'(a_i)}{H(a_i)}$$

et si l'on prend la dérivée logarithmique de la relation (79) et qu'on y fasse ensuite $x = 0$ on aura

$$-\frac{\psi(0)}{\lambda\varphi(0)} = \frac{\pi(\beta+1)i}{2K} - \sum_1^{\beta} \frac{H'(a_i)}{H(a_i)} + \frac{H'(\omega)}{H(\omega)};$$

on en déduit par suite

$$\frac{C}{2} - \frac{\pi(\beta+1)i}{2K} = \frac{H'(\omega)}{H(\omega)} + \frac{R_0}{\lambda A_0}.$$

Donc l'intégrale cherchée prendra en définitive la forme

$$\begin{aligned}\mathrm{dn}^{\nu-n_1}x\ \mathrm{cn}^{\nu_1-n_2}x\ \mathrm{sn}^{\nu_2-n_3}x \Bigg[& A[\lambda\varphi(\mathrm{sn}^2x) - \mathrm{sn}\,x\ \mathrm{cn}\,x\ \mathrm{dn}\,x\,\psi(\mathrm{sn}^2x)] \\ & \times \frac{\Theta(x)}{H(x+\omega)} e^{\left[\frac{H'(\omega)}{H(\omega)} + \frac{R_0}{\lambda A_0}\right]x} \\ & + B[\lambda\varphi(\mathrm{sn}^2x) + \mathrm{sn}\,x\ \mathrm{cn}\,x\ \mathrm{dn}\,x\,\psi(\mathrm{sn}^2x)] \frac{\Theta(x)}{H(x-\omega)} e^{-\left[\frac{H'(\omega)}{H(\omega)} + \frac{R_0}{\lambda A_0}\right]x} \Bigg]\end{aligned}$$

toutes les quantités qui figurent dans cette intégrale se calculant, comme nous l'avons indiqué, en fonctions des données n, n_1, n_2, n_3, ν, ν_1, ν_2 et h.

Chateau de Vallière, 11 Juin 1883.

UEBER GEWISSE DURCH DIE GAMMAFUNCTION AUSDRÜCKBARE UNENDLICHE PRODUCTE.

Aus einem Brief an Herrn G. Mittag-Leffler

VON

HJALMAR MELLIN
in HELSINGFORS.

Die Gleichung

$$\frac{\Gamma^\nu(z)}{\Gamma(z-\rho_1 x)\Gamma(z-\rho_2 x)\cdots\Gamma(z-\rho_\nu x)} = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{x^\nu}{(z+n)^\nu}\right),$$

welche in meinem in *Acta Mathematica* Band 3 Seite 102—104 publicirten Brief vorkommt, kann noch auf folgende Weise verallgemeinert werden.

Ist $R(x)$ eine beliebige ganze rationale Function, welche der Bedingung

$$R(0) = 0$$

genügt, bezeichnet ferner α_1 den Coefficienten der ersten Potenz von x in $R(x)$:

$$R(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_\nu x^\nu,$$

und bildet man das Product

$$\left(1 + R\left(\frac{x}{z}\right)\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + R\left(\frac{x}{z+n}\right)\right)e^{-\alpha_1\frac{x}{n}},$$

so hat dieses für jeden Werth von x und jeden von z, der nicht gleich o, — 1, — 2, ... ist, einen bestimmten endlichen Werth, und es ist

$$\frac{\Gamma^{\nu}(z)}{\Gamma(z-\rho_1 x)\,\Gamma(z-\rho_2 x)\cdots\Gamma(z-\rho_\nu x)} = e^{C\alpha_1 x}\left(1+R\left(\frac{x}{z}\right)\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+R\left(\frac{x}{z+n}\right)\right)e^{-\alpha_1\frac{x}{n}},$$

$$(C = 0{,}577\ldots)$$

wo $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ die Wurzeln der Gleichung

$$\rho^{\nu}\left(1+R\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) = \rho^{\nu}+\alpha_1\rho^{\nu-1}+\ldots+\alpha_\nu = 0$$

bezeichnen.

Es scheint mir, dass diese Gleichung an die Seite der Gleichung

$$\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} = F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ 1) = 1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\underline{|2}\ \gamma(\gamma+1)}+\ldots$$

gestellt werden kann: durch diese werden gewisse unendliche Reihen, durch jene gewisse unendliche Producte bestimmt.

Die erwähnte Gleichung ergiebt sich auf folgende Weise. Weil $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ die Wurzeln der Gleichung

$$\rho^{\nu}\left(1+R\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) = \rho^{\nu}+\alpha_1\rho^{\nu-1}+\ldots+\alpha_\nu = 0$$

bezeichnen, so ist

$$\left(\frac{z+n}{x}\right)^{\nu}\left(1+R\left(\frac{x}{z+n}\right)\right) = \left(\frac{z+n}{x}-\rho_1\right)\left(\frac{z+n}{x}-\rho_2\right)\cdots\left(\frac{z+n}{x}-\rho_\nu\right)$$

$$= \left(\frac{n}{x}\right)^{\nu}\left(1+\frac{z-\rho_1 x}{n}\right)\left(1+\frac{z-\rho_2 x}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{z-\rho_\nu x}{n}\right),$$

und mithin

$$1+R\left(\frac{x}{z+n}\right) = \frac{\left(1+\frac{z-\rho_1 x}{n}\right)\left(1+\frac{z-\rho_2 x}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{z-\rho_\nu x}{n}\right)}{\left(1+\frac{z}{n}\right)^{\nu}}.$$

Hieraus folgt, weil $-\alpha_1 = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_\nu$ ist,

$$\left(1 + R\left(\frac{x}{z}\right)\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + R\left(\frac{x}{z+n}\right)\right) e^{-\alpha_1 \frac{x}{n}}$$

$$= e^{-C\alpha_1 x} \frac{e^{-\nu C z}}{z^\nu \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^\nu e^{-\frac{\nu z}{n}}} \cdot \frac{(z - \rho_1 x) \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z - \rho_1 x}{n}\right) e^{-\frac{z - \rho_1 x}{n}}}{e^{-C(z - \rho_1 x)}} \cdots$$

$$\cdots \frac{(z - \rho_\nu x) \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z - \rho_\nu x}{n}\right) e^{-\frac{z - \rho_\nu x}{n}}}{e^{-C(z - \rho_\nu x)}},$$

welche gerade die in Frage stehende Gleichung ist.

Bezeichnet man die logarithmische Ableitung von $\Gamma(z)$ durch $\psi(z)$, so können noch folgende Gleichungen aufgestellt werden:

$$\frac{\Gamma^\nu(z)}{\Gamma(z - \rho_1 x)\,\Gamma(z - \rho_2 x) \ldots \Gamma(z - \rho_\nu x)} = e^{-\alpha_1 \psi(z) x} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + R\left(\frac{x}{z+n}\right)\right) e^{-\alpha_1 \frac{x}{z+n}},$$

$$\frac{\Gamma^\nu(z)}{\Gamma(z - \rho_1 x)\,\Gamma(z - \rho_2 x) \ldots \Gamma(z - \rho_\nu x)} = e^{-\sum\limits_{s=1}^{s=\nu} (-1)^{s-1} \alpha_s \frac{\psi^{(s-1)}(z)}{\underline{|s-1}} x^s} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + R\left(\frac{x}{z+n}\right)\right) e^{-R\left(\frac{x}{z+n}\right)}.$$

SUR LES INVARIANTS
DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU QUATRIÈME ORDRE

PAR

G. H. HALPHEN

À PARIS.

Je me propose d'étudier ici la théorie détaillée des invariants pour les équations du quatrième ordre, et d'identifier cette théorie avec celle des invariants différentiels pour les courbes gauches. Une partie de cette étude se trouve déjà dans mon mémoire *Sur la réduction des équations linéaires aux formes intégrables*; [1] mais je ne renverrai pas le lecteur à ce mémoire, et l'on trouvera ici une exposition complète, suivie d'applications.

1. Soit une équation linéaire du quatrième ordre

$$\frac{d^4Y}{dX^4} + 4P_1\frac{d^3Y}{dX^3} + 6P_2\frac{d^2Y}{dX^2} + 4P_3\frac{dY}{dX} + P_4Y = 0, \tag{1}$$

où les lettres P désignent des fonctions de X. En dénotant par u et μ deux fonctions de X, posant

$$\frac{dx}{dX} = \mu, \qquad Y = uy, \tag{2}$$

et prenant x, y pour nouvelles variables, on obtient une transformée

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4p_1\frac{d^3y}{dx^3} + 6p_2\frac{d^2y}{dx^2} + 4p_3\frac{dy}{dx} + p_4y = 0. \tag{3}$$

---

[1] Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences de l'institut de France. T. XXVIII N° 1 (Paris 1883).

Les nouveaux coefficients p s'expriment au moyen des anciens coefficients P et de u, μ avec leurs dérivées u', u'', ... μ', μ'', ... prises par rapport à X. Toute fonction de p, $\frac{dp}{dx}$, ... est donc exprimable par P, $\frac{dP}{dX}$, ... u, u', ... μ, μ', ... Si cette fonction f est telle que u, u', ... μ, μ' ... disparaissent de son expression, on a alors

$$f\left(p, \frac{dp}{dx}, \ldots\right) = f\left(P, \frac{dP}{dX}, \ldots\right),$$

et f est un *invariant absolu.* L'existence de telles fonctions sera bientôt prouvée. Nous la supposons d'abord.

2. Sans qu'il soit besoin de développer les relations entre les P et les p, observons seulement le caractère suivant:

En dénotant par λ_{m-1} une fonction linéaire des coefficients P, affectés d'indices non supérieurs à $(m - 1)$, on a

$$p_m = \frac{1}{\mu^m}(P_m + \lambda_{m-1}).$$

Généralisons cette remarque comme il suit. Attribuons à $\frac{d^n P_m}{dX^n}$ le *poids* $(m + n)$. Par la même lettre λ, affectée d'un indice, désignons une fonction linéaire des P et de leurs dérivées, où le poids de chaque terme ne dépasse pas l'indice de λ. De la précédente formule, nous déduirons celle-ci:

$$\frac{d^n p_m}{dx^n} = \frac{1}{\mu^{m+n}}\left(\frac{d^n P_m}{dX^n} + \lambda_{m+n-1}\right).$$

Etendons encore la convention en admettant pour λ une forme non linéaire. Soit A_n une fonction entière des P, $\frac{dP}{dX}$, ..., et dont tous les termes soient d'un même poids n. Soit a_n la même fonction formée avec p, $\frac{dp}{dx}$, ... Nous aurons

$$a_n = \frac{1}{\mu^n}(A_n + \lambda_{n-1}). \tag{4}$$

On ne manquera pas d'observer que les restes λ sont nuls dans le cas particulier où u est l'unité, et μ une constante.

3. Considérons un invariant absolu, rationnel par rapport aux P et leurs dérivées. Mettons les poids en évidence, en réunissant au numérateur ainsi qu'au dénominateur les termes de poids commun, ordonnons par rapport aux poids, et dénotons ces poids par des indices. Soient ainsi

$$\frac{A_n + A_{n-1} + A_{n-2} + \ldots}{B_m + B_{m-1} + B_{m-2} + \ldots} = \frac{a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots}{b_m + b_{m-1} + b_{m-2} + \ldots}$$

les deux expressions de l'invariant, par les P, $\frac{dP}{dX}$, ... d'une part; par les p, $\frac{dp}{dx}$, ... d'autre part. Ces deux expressions doivent être identiques, en vertu des relations telles que (4): c'est là ce que suppose l'invariance.

Prenons d'abord le cas simple où u est l'unité et μ une constante. Nous aurons identiquement:

$$\frac{A_n + A_{n-1} + A_{n-2} + \ldots}{B_m + B_{m-1} + B_{m-2} + \ldots} = \mu^{m-n} \frac{A_n + \mu A_{n-1} + \mu^2 A_{n-2} + \ldots}{B_m + \mu B_{m-1} + \mu^2 B_{m-2} + \ldots}.$$

De là résulte $n = m$, $A_{n-1} = 0$, $B_{m-1} = 0$, ...; l'invariant se réduit au quotient de deux fonctions A_n, B_n, toutes deux homogènes quant au poids, et toutes deux d'un même poids n.

Prenons maintenant le cas général; nous aurons, suivant (4), et avec deux restes λ_{n-1}, λ'_{n-1}, une identité telle que

$$\frac{A_n + \lambda_{n-1}}{B_n + \lambda'_{n-1}} = \frac{A_n}{B_n}.$$

Or les deux restes étant de poids moindre que n, à tous leurs termes, et A_n, B_n pouvant être supposés sans facteur commun, le quotient $\lambda_{n-1} : \lambda'_{n-1}$ ne saurait être égal à $A_n : B_n$. Donc les deux restes sont nuls.

Donc le numérateur, ainsi que le dénominateur, d'un invariant absolu est un invariant *relatif,* ayant la propriété que caractérise la relation

$$\varphi\left(p, \frac{dp}{dx}, \ldots\right) = \frac{1}{\mu^n} \varphi\left(P, \frac{dP}{dX}, \ldots\right).$$

Le nombre n est le *poids* de l'invariant; il est entier et positif quand φ est, comme dans cette analyse, une fonction entière.

4. Si une relation algébrique entre $P, \frac{dP}{dX}, \ldots$ est invariante pour les substitutions (2), c'est à dire si cette relation

$$\psi\left(P, \frac{dP}{dX}, \ldots\right) = 0$$

a pour transformée

$$\psi\left(p, \frac{dp}{dx}, \ldots\right) = 0,$$

alors ψ, supposée fonction entière, est un invariant. On le prouve en raisonnant comme tout à l'heure.

De telles relations invariantes peuvent être aisément conçues et fournissent la voie la plus naturelle pour obtenir les invariants. Pour ce but, on n'a qu'à choisir une équation exprimant, entre les intégrales, une relation invariable à la fois par les substitutions (2) et par le changement des intégrales entre elles.

Il existe, par exemple, une telle équation exprimant que les intégrales sont liées par une relation quadratique homogène à coefficients constants. Il n'y a aucun embarras théorique, mais seulement longueur de calcul, à former cette équation de la manière suivante: si y est une intégrale de l'équation proposée (3), y^2 satisfait à une équation différentielle linéaire du $10^{\text{ème}}$ ordre, dont on peut calculer les coefficients en fonction de $p, \frac{dp}{dx}, \ldots$ Dans cette équation, mise sous forme entière, le coefficient de la dérivée du $10^{\text{ème}}$ ordre fournit la fonction ψ dont il s'agit. Je reviendrai plus loin (n° 30) sur ce calcul. La fonction ψ sera d'ailleurs trouvée par une autre voie.

5. C'est la considération d'une autre transformée, celle-ci du $6^{\text{ème}}$ ordre, qui va nous fournir le plus simple des invariants. Prenons l'équation primitive privée de son second terme,

$$y^{\text{IV}} + 6p_2y'' + 4p_3y' + p_4y = 0$$

et dénotons les dérivées par des accents.

Soient u, w deux intégrales, et posons

$$z = uw' - wu'.$$

L'inconnue z satisfait à une équation linéaire du $6^{\text{ème}}$ ordre, que nous allons former. Suivant une notation usitée pour les déterminants, écrivons en différentiant successivement

$$z = (uw')$$

$$z' = (uw'')$$

$$z'' = (uw''') + (u'w'').$$

À la dérivée suivante, nous éliminerons u^{IV} et w^{IV} au moyen de l'équation proposée; en tenant compte des relations précédentes, nous aurons

$$z''' + 6p_2z' + 4p_3z = 2(u'w''').$$

En continuant, nous obtenons à la dérivation suivante

$$(z''' + 6p_2z' + 4p_3z)' - 2p_4z = 2(u''w''') - 12p_2(u'w'').$$

Posant ensuite

$$Z = (z''' + 6p_2z' + 4p_3z)'' + 6p_2(z''' + 6p_2z' + 4p_3z) - 4p_4z' - 2p_4'z,$$

la cinquième différentiation nous donne:

$$Z = 4(2p_3 - 3p_2')(u'w'').$$

Voici enfin la transformée cherchée:

$$(2p_3 - 3p_2')Z' - (2p_3' - 3p_2'')Z - 2(2p_3 - 3p_2')^2(z''' + 6p_2z' + 4p_3z) = 0.$$

Cette transformée se réduit au cinquième ordre, et consiste en $Z = 0$, dans le cas particulier où l'on a identiquement

$$\varphi = 2p_3 - 3p_2' = 0.$$

La relation $\varphi = 0$ exprime donc que les six fonctions (uw') sont liées linéairement. Une telle propriété est invariante pour les substitutions (2), et se conserve aussi quand on change les intégrales. Donc φ est un invariant.

Pour avoir les mêmes notations que dans ma théorie des courbes

gauches,[1] je prendrai comme invariant fondamental $-\frac{1}{30}\varphi$, que je désignerai par la lettre v. Voici donc le premier invariant à employer:

$$v = \frac{1}{30}(3p_2' - 2p_3). \tag{5}$$

6. Arrêtons-nous un instant pour faire une application en prenant pour exemple l'équation

$$y^{\mathrm{IV}} - 2n(n+1)\wp y'' - 2n(n+1)\wp' y' + \left[\frac{n(n+1)(n+3)(n-2)}{6}\wp'' + \alpha\right] y = 0. \tag{6}$$

Les lettres n et α désignent deux constantes. Quant à la lettre $\wp$, elle représente la fonction elliptique de M. Weierstrass; pour abréger l'écriture, j'omets, après cette lettre $\wp$, celle qui représente la variable indépendante. Je rappelle, d'après les notations usitées, les relations

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

$$\wp'' = 6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2$$

$$\wp''' = 12\wp\wp'.$$

Dans cet exemple, l'invariant v est nul; en faisant le calcul de Z, on trouve alors que le dernier terme manque. De la sorte, en prenant

$$\zeta = z' = uw'' - wu'',$$

on a une transformée du $4^{\text{ème}}$ ordre:

$$\zeta^{\mathrm{IV}} - 4n(n+1)\wp\zeta'' - 6n(n+1)\wp'\zeta' + [\beta - 2n(n+1)\wp'']\zeta = 0, \tag{7}$$

dans laquelle la constante β est liée à α par la relation

$$\beta = \frac{n^2(n+1)^2}{3}g_2 - 4\alpha.$$

---

[1] *Sur les invariants différentiels des courbes gauches*, Journal de l'École Polytechnique. XLVII$^{\text{ème}}$ Cahier (Paris 1880).

J'ai déjà, dans mon mémoire *Sur la réduction des équations linéaires* (p. 272), signalé l'équation (6), au cas où n est un nombre entier, comme intégrable d'une manière analogue à l'équation de Lamé. On verra plus loin (n° 22) qu'elle se ramène à l'équation de Lamé elle-même.

7. J'ai pris, au n° 5, une équation privée de son second terme. Il est facile de revenir au cas général. On fait disparaître le second terme de l'équation (1) en prenant $y = Ye^{\int P_1 dX}$. La transformée a les coefficients suivants

$$(8)\quad \begin{cases} p_1 = 0,\ \ p_2 = P_2 - P_1' - P_1^2,\ \ p_3 = P_3 - 3P_1P_2 + 2P_1^3 - P_1'', \\ p_4 = P_4 - 4P_1P_3 + 6P_1^2P_2 - 3P_1^4 - 6P_2P_1' + 6P_1^2P_1' + 3P_1'^2 - P_1'''. \end{cases}$$

Dans un invariant où l'on a fait $p_1 = 0$, il suffit de remplacer p_2, p_3, p_4 par ces valeurs (8), pour obtenir la forme générale.

J'emploierai communément la même lettre, majuscule ou minuscule, pour un même invariant supposé se rapporter à l'équation (1) ou à l'équation (3). Ainsi, pour l'équation complète (1), l'invariant (5) sera désigné par V; il aura l'expression suivante, où les dérivées sont prises par rapport à X:

$$(9)\qquad 30V = -P_1'' + 3(P_2' - 2P_1P_1') - 2(P_3 - 3P_1P_2 + 2P_1^3).$$

Son poids est égal à 3. En conséquence, la même quantité v, exprimée par les coefficients de (3), et avec les dérivées prises par rapport à x, donne lieu à l'identité

$$V = \mu^3 v.$$

8. Envisageons quatre intégrales distinctes Y, comme les coordonnées homogènes d'un point Y de l'espace. Ce point varie avec X et a pour lieu une courbe *attachée* à l'équation. Changer les intégrales Y revient à transformer homographiquement la courbe; changer Y en uY ne change pas le point; changer la variable indépendante n'altère pas la courbe. On voit donc que la courbe attachée, définie par une quelconque de ses homographiques, est invariante pour les substitutions (2). Donc ses invariants sont aussi des invariants de l'équation différentielle.

Les coefficients de l'équation, exprimés par les intégrales, sont des fonctions des éléments infinitésimaux de la courbe en un même point. Donc les invariants de l'équation, composés algébriquement avec les coefficients et leurs dérivées, sont des *invariants différentiels* de la courbe attachée.

Les déterminants (uw'), considérés au n° 5, sont les coordonnées de la tangente à la courbe. Ainsi l'invariant v a la signification suivante: *l'équation* $v = 0$ *caractérise toute courbe dont les tangentes appartiennent à un même complexe linéaire.*

Dans ma théorie des courbes gauches, j'ai employé les coordonnées cartésiennes x, y, z, et pris les dérivées par rapport à x. J'ai fait usage, en outre, des notations suivantes

$$a_n = \frac{1}{4 \cdot 5 \ldots n} \frac{y''z^{(n)} - z''y^{(n)}}{y''z''' - z''y'''}$$

$$n \geq 4$$

$$b_n = \frac{1}{3 \cdot 4 \ldots n} \frac{y^{(n)}z''' - y'''z^{(n)}}{y''z''' - z''y'''}.$$

Tout invariant différentiel entier, divisé par une puissance convenable de $(y''z''' - z''y''')$, s'exprime en fonction entière des quantités a, b. Avec ces notations, j'ai trouvé par la propriété géométrique précédente, l'invariant

$$v = a_6 - 2b_5 - 3a_4a_5 + 3a_4b_4 + 2a_4^3.$$

Les deux invariants, dénotés tous deux par v, ne peuvent différer que par un facteur numérique. Voici comment on peut faire facilement la comparaison.

Prenons une équation privée de ses deux derniers termes; elle admet alors les solutions 1, x. Si l'on appelle y, z deux autres solutions, on a, d'après les notations précédentes,

$$p_1 = -a_4, \quad p_2 = -2b_4.$$

De là, en différentiant:

$$p_1^{(k)} = -5 \cdot 6 \ldots (k+4)a_{k+4} + \ldots$$

$$p_2^{(k)} = -2 \cdot 5 \cdot 6 \ldots (k+4)b_{k+4} + \ldots$$

formules où sont négligés des restes contenant des dérivées, toutes d'ordre inférieur à $(k+4)$.

On voit par là que, dans V, fourni par la relation (9), le terme de l'ordre le plus élevé provient de $-\frac{1}{30}P_1''$; et c'est précisément a_6.

Ainsi l'invariant v, adopté ici, coïncide exactement avec celui de ma théorie des courbes. La même précaution sera prise, dans la suite, pour les autres invariants. La vérification pourra être faite de la même manière; mais je me dispenserai de la reproduire.

9. La connaissance d'un seul invariant conduit à la formation immédiate de tous les autres, au moyen d'une forme réduite de l'équation différentielle.

À cet effet, employons l'invariant V. Dans la substitution (2) prenons μ de façon à réduire v à une constante numérique, soit $\frac{1}{30}$; et u de façon à priver la transformée du second terme. Ce choix est réalisé ainsi

$$\mu = (30V)^{\frac{1}{3}}, \quad u = V^{-\frac{1}{2}} e^{-\int P_1 dX}.$$

En appelant ξ, η, au lieu de x, y, les variables nouvelles, nous avons la forme réduite suivante

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} + 2H\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + 2\left(\frac{dH}{d\xi} - 1\right)\frac{d\eta}{d\xi} + K\eta = 0.$$

Les lettres H, K désignent deux fonctions des P, $\frac{dP}{dX}$, ..., et ce sont manifestement des invariants absolus. Leurs numérateurs sont rationnels, leurs dénominateurs sont des puissances de V. Il en va de même de $\frac{dH}{d\xi}$; car on a:

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{1}{(30V)^{\frac{1}{3}}}\frac{dH}{dX} = H_1.$$

De même encore les dérivées successives de H, K, prises par rapport à ξ, s'expriment par une double suite d'invariants absolus, à numérateurs rationnels, et à dénominateurs égaux à des puissances de V. Soient H_1, H_2, ...; K_1, K_2, ... ces invariants absolus.

Tout invariant absolu peut être, sans altération, calculé sur l'équation réduite. Donc tout invariant absolu rationnel est exprimable rationnellement par H, H_1, H_2, ...; K, K_1, K_2, ...; et tout invariant relatif entier, divisé par une puissance de V, est exprimable en fonction entière des mêmes quantités.

10. Le calcul de K est immédiat ainsi: prenons l'équation privée du second terme, alors u se réduit à $V^{-\frac{1}{2}}$. Donc $K = 0$ exprime que l'équation admet la solution $V^{-\frac{1}{2}}$, et le numérateur de K est l'invariant suivant

$$\varphi = v^{\frac{9}{2}}\left[\left(v^{-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{IV}} + 6p_2\left(v^{-\frac{1}{2}}\right)'' + 4p_3\left(v^{-\frac{1}{2}}\right)' + p_4 v^{-\frac{1}{2}}\right],$$

où l'on n'a plus qu'à mettre V au lieu de v, et à substituer aux p les expressions (8), pour obtenir l'expression générale du numérateur Φ. On a d'ailleurs

$$K = \frac{\Phi}{V^4(30V)^{\frac{4}{3}}}.$$

Cette analyse, faite au moyen de l'invariant V, peut se faire de même au moyen de tout autre. Ainsi p_2, p_3, p_4 désignant encore les quantités (8), et ω un invariant quelconque du poids m, la combinaison

$$\left(\omega^{-\frac{3}{2m}}\right)^{\mathrm{IV}} + 6p_2\left(\omega^{-\frac{3}{2m}}\right)'' + 4p_3\left(\omega^{-\frac{3}{2m}}\right)' + p_4\omega^{-\frac{3}{m}}$$

est un invariant.

11. Pour avoir l'expression de H, employons les formules générales de transformation, mais en nous bornant à une formule unique qui nous suffira.

Soit une équation privée du second terme

$$\frac{d^4Y}{dX^4} + 6P_2\frac{d^2Y}{dX^2} + 4P_3\frac{dY}{dX} + P_4Y = 0.$$

Changeons la variable indépendante d'une manière arbitraire, en posant, comme précédemment,

$$\frac{dx}{dX} = \mu.$$

En même temps, changeons l'inconnue de manière que la transformée manque aussi du second terme. Pour ce but, il faut prendre

$$Y = y\mu^{-\frac{3}{2}}.$$

Posons alors

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dX} = \lambda.$$

La transformée étant

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 6p_2\frac{d^2y}{dx^2} + 4p_3\frac{dy}{dx} + p_4y = 0,$$

son coefficient p_2 est donné par la formule

$$(10)\qquad 6p_2 = \frac{1}{\mu^2}\left(6P_2 - 5\lambda' + \frac{5}{2}\lambda^2\right).$$

Dans cette formule (10), facile à vérifier, la dérivée λ' est prise par rapport à X.

En y mettant $(30V)^{\frac{1}{3}}$ pour μ, et, par conséquent, $\frac{1}{3}\frac{V'}{V}$ pour λ, nous trouvons pour le numérateur de H:

$$\varDelta = \frac{5}{6}VV'' - \frac{35}{36}V'^2 - 3P_2V^2.$$

En revenant, par les formules (8), au cas d'une équation complète, nous avons l'invariant

$$(11)\qquad \varDelta = \frac{5}{6}VV'' - \frac{35}{36}V'^2 - 3(P_2 - P_1^2 - P_1')V^2.$$

De là résulte, pour H, l'expression

$$H = -\frac{\varDelta}{V^2(30V)^{\frac{2}{3}}}.$$

Voici, à propos de $\varDelta$, une observation qui sera utile plus loin. En

retenant seulement les premiers termes de V, donné par (9), nous pouvons écrire

$$\varDelta = \frac{5}{6} V\left(\frac{-P_1^{\mathrm{IV}} + 3P_2'''}{30}\right) - \frac{35}{36}\left(\frac{P_1'''}{30}\right)^2 + AP_1''' + B,$$

A et B ne contenant pas de dérivée au delà du second ordre.

12. D'après le n° 9, les trois invariants V, $\varDelta$, $\varPhi$ peuvent servir à la formation d'une double suite indéfinie d'invariants, par le moyen desquels tout invariant s'exprime rationnellement. Mais $\varDelta$ et $\varPhi$ ne sont pas les plus simples qu'on puisse choisir; il en existe deux autres qui ne contiennent pas de dérivée au delà du 3ème ordre. C'est ce que je vais faire voir.

La voie qui va être suivie pour obtenir le premier de ces invariants donne aussi l'invariant V; elle s'applique aux équations de tous les ordres.

Soit l'équation

$$z'' = gz. \tag{12}$$

En faisant $y = z^3$, on en déduit, pour y, l'équation suivante:

$$y^{\mathrm{IV}} - 10gy'' - 10g'y' + 3(3g^2 - g'')y = 0. \tag{13}$$

Si z_1 et z_2 sont deux intégrales de (12), distinctes entre elles, on a, pour (13), les quatre intégrales

$$z_1^3, \quad z_1^2 z_2, \quad z_1 z_2^2, \quad z_2^3.$$

Ainsi l'équation (13) est le type de l'équation du 4ème ordre ayant quatre intégrales satisfaisant aux relations

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \frac{y_3}{y_4}.$$

En d'autres termes, à l'équation (13) est attachée la *cubique gauche*. Comparée à l'équation générale, privée du second terme, la forme (13) donne lieu aux relations

$$3p_2 = -5g, \quad 2p_3 = -5g', \quad p_4 = 3(3g^2 - g''),$$

d'où, par élimination de g,

$$(14)\qquad 3p_2' - 2p_3 = 0, \qquad p_4 - \frac{6}{5}p_3' - \left(\frac{9}{5}\right)^2 p_2^2 = 0.$$

Ces deux relations (14) peuvent être considérées comme les équations différentielles des cubiques gauches.

13. Voici, en manière de digression, un exemple de l'équation (13). Prenons

$$g = n(n+1)\wp,$$

les notations étant les mêmes qu'au n° 6. Nous avons ainsi l'équation

$$y^{\text{IV}} - 10n(n+1)\wp y'' - 10n(n+1)\wp' y'$$

$$+ \frac{3}{2}n(n+1)\left[n(n+1)\frac{g_2}{2} + (n+2)(n-1)\wp''\right]y = 0.$$

Cette dernière est, d'après notre analyse, une transformée de l'équation de Lamé dans un cas particulier

$$z'' = n(n+1)\wp z.$$

Elle est donc intégrable quand n est un nombre entier. Mais l'équation en z est aussi intégrable pour $n = \frac{1}{2}$ (voyez plus loin, n° 47). Ce cas donne le résultat suivant:

l'équation

$$y^{\text{IV}} - \frac{15}{2}\wp(u)y'' - \frac{15}{2}\wp'(u)y' + \frac{9}{32}\left[\frac{3}{2}g_2 - 5\wp''(u)\right]y = 0$$

a pour intégrale générale:

$$y = \wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\mathfrak{F}\left[\wp\left(\frac{u}{2}\right)\right],$$

$\mathfrak{F}$ étant un polynôme du $3^{\text{ème}}$ degré à coefficients arbitraires.

14. Revenons aux équations (14), dont la première est $v = 0$. La seconde, tout en n'ayant pas un invariant pour premier membre, va servir à en former un. Soit ω ce premier membre, et soit Ω la même quantité formée avec les lettres P, en supposant qu'on envisage la même substitution qu'au n° 11. Je vais chercher la liaison entre ω et Ω.

De la formule (10) ainsi que de la relation $v = \frac{1}{\mu^3} V$, je déduis les suivantes:

$$\frac{dp_2}{dx} = \frac{1}{\mu^3}\left(\frac{dP_2}{dX} - 2\lambda P_2 + \ldots\right)$$

$$p_3 = \frac{1}{\mu^3}(P_3 - 3\lambda P_2 + \ldots)$$

$$\frac{dp_3}{dx} = \frac{1}{\mu^4}\left(\frac{dP_3}{dX} - 3\lambda P_3 - 3\lambda\frac{dP_2}{dX} + \ldots\right)$$

$$\omega = \frac{1}{\mu^4}\left(\Omega + \frac{18}{5}\lambda\frac{dP_2}{dX} + \ldots\right).$$

Dans ces formules, on a négligé des restes: dans la dernière, le reste ne contient manifestement aucune dérivée des quantités P. Il en sera tout autant du reste R, que l'on obtiendra en écrivant la dernière égalité sous cette autre forme:

$$\omega = \frac{1}{\mu^4}(\Omega + 36\lambda V + R).$$

Or la propriété exprimée par les relations (14) est invariante. Donc le système des équations $\omega = 0$, $v = 0$ doit se changer en $\Omega = 0$, $V = 0$. Donc $R = 0$ doit se réduire à une combinaison de ces dernières. Mais, ne contenant aucune dérivée, R est, par suite, identiquement nul. La liaison cherchée est donc

$$\omega = \frac{1}{\mu^4}(\Omega + 36\lambda V).$$

En dérivant les deux membres de $v = \frac{1}{\mu^3} V$, on obtient

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\mu^4}\left(\frac{dV}{dX} - 3\lambda V\right).$$

En conséquence:

$$\omega + 12\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\mu^4}\left(\Omega + 12\frac{dV}{dX}\right).$$

J'ai donc ainsi trouvé un invariant nouveau. Pour mettre les notations d'accord avec celles de la théorie des courbes gauches, je le désignerai par $42s_7$; l'indice 7 rappelle qu'il est du $7^{\text{ème}}$ ordre par rapport aux intégrales. Voici son expression pour l'équation sans second terme

$$(15) \qquad 42s_7 = p_4 - 2p_3' + \frac{6}{5}p_2'' - \frac{81}{25}p_2^2.$$

On aura l'expression générale par l'emploi des formules (8). Il est inutile de la transcrire; on remarquera seulement que le terme de l'ordre le plus élevé est $-\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}P_1'''$.

Avec s_7 et v on peut former une suite indéfinie d'invariants, analogue à la suite $H, H_1, H_2, \ldots$ Les ordres, marqués par les indices, croissent constamment d'une unité, les poids de quatre unités:

$$s_8 = \frac{1}{8}\left(vs_7' - \frac{4}{3}v's_7\right), \quad s_9 = \frac{1}{9}\left(vs_8' - \frac{8}{3}v's_8\right), \quad s_{10} = \frac{1}{10}\left(vs_9' - \frac{12}{3}v's_9\right), \ldots$$

Dans l'invariant S_n, le terme de l'ordre le plus élevé est

$$-\frac{1}{5\cdot 6\ldots n}V^{n-7}P_1^{(n-4)}.$$

15. Les invariants $\varDelta$ et S_8 sont tous deux du poids 8. En les combinant linéairement, nous formerons celui-ci: $\frac{1}{35}\varDelta - \frac{4}{3}S_8$, qui, d'après le n° 11, ne contient plus P_1^{IV}. On y trouve un terme du second degré en P_1''', qu'on peut faire disparaître en retranchant $\frac{7}{36}S_7^2$. Nous obtenons de la sorte l'invariant

$$(16) \qquad T_7 = \frac{1}{35}\varDelta - \frac{4}{3}S_8 - \frac{7}{36}S_7^2;$$

il ne contient pas de dérivée au-dessus du 3ème ordre. Les dérivées P_2''' et P_1''', seules dérivées du 3ème ordre qui y figurent, y entrent linéairement. Enfin le terme en P_2''' a pour coefficient $-\frac{1}{2.5.6.7}V$.

Avec t_7 et v on forme, de même qu'avec s_7 et v, une suite indéfinie d'autres invariants:

$$t_8 = \frac{1}{8}\left(vt_7' - \frac{8}{3}v't_7\right), \quad t_9 = \frac{1}{9}\left(vt_8' - \frac{12}{3}v't_8\right), \quad t_{10} = \frac{1}{10}\left(vt_9' - \frac{16}{3}v't_9\right), \ \ldots$$

L'invariant T_n est linéaire par rapport à $P_2^{(n-4)}$ et $P_1^{(n-4)}$, seules dérivées d'ordre $(n-4)$ qui y figurent. Le coefficient de $P_2^{(n-4)}$ est égal à $-\frac{1}{2.5.6\ldots n}V^{n-6}$.

16. Soit un invariant exprimé par s_7, t_7, s_8, t_8, ... Sa dérivée, prise par rapport à la variable ξ (n° 9), s'exprime facilement de la même manière. Par exemple, l'équation (16) donne l'expression de ∂. On en déduit

$$8t_8 = \frac{1}{35}\left(v\partial' - \frac{8}{3}v'\partial\right) - 12s_9 - \frac{28}{9}s_7s_8,$$

relation qui fournit le numérateur $\left(v\partial' - \frac{8}{3}v'\partial\right)$ de $\frac{d\Delta}{d\xi}$. En conséquence, les numérateurs des invariants H, H_1, ... sont exprimables en fonction entière de v, s_7, s_8, ... t_7, t_8, ...

En calculant l'invariant absolu $v^{-\frac{3}{4}}s_7$ sur l'équation réduite, nous obtenons:

$$\frac{42s_7}{(30v)^{\frac{3}{4}}} = K - \frac{3}{5}\frac{d^2H}{d\xi^2} - \frac{9}{25}H^2.$$

Nous avons donc aussi le moyen d'exprimer le numérateur de K par les mêmes invariants, et, par suite, les numérateurs de K_1, K_2, ...

Donc tout invariant relatif, multiplié par une puissance convenable de v, est exprimable en fonction entière des invariants *fondamentaux* v, s_7, t_7, s_8, t_8, ...

17. La construction des invariants fondamentaux tombe en défaut si v est identiquement nul. Dans ce cas particulier, il est tout naturel de procéder absolument de même qu'au n° 6, mais en prenant s_7, au lieu de v, pour base de la construction. Si s_7 et v sont nuls tous deux, c'est alors le cas où l'équation peut être réduite à la forme (13), et il n'existe plus aucun invariant.

Arrêtons-nous sur le cas où v est identiquement nul, mais non s_7. On peut, au lieu de s_7, prendre la combinaison

$$W = \frac{1}{6}\left(\frac{dV}{dX} - 7S_7\right),$$

qui ne contient plus de dérivée du 3ème ordre, et reproduit $-\frac{7}{6}S_7$ dès que V est identiquement nul. Cette combinaison W est alors un invariant dans ce cas particulier. Pour l'équation privée du second terme, on a:

$$-36w = p_4 - \frac{6}{5}p_3' - \left(\frac{9}{5}\right)^2 p_2^2.$$

En prenant pour point de départ une équation complète, où V est nul, et posant

$$\frac{d\xi}{dX} = (-36W)^{\frac{1}{4}}, \qquad Y = \eta W^{-\frac{3}{8}} e^{-\int P_1 dX},$$

on obtiendra la transformée réduite

$$(17) \qquad \frac{d^4\eta}{d\xi^4} + 2J\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + 2\frac{dJ}{d\xi}\frac{d\eta}{d\xi} + \left(1 + \frac{3}{5}\frac{d^2J}{d\xi^2} + \frac{9}{25}J^2\right)\eta = 0.$$

Le numérateur de J est

$$\theta = \frac{5}{4}WW'' - \frac{45}{42}W'^2 - 6(P_2 - P_1^2 - P_1')W^2,$$

et l'on a

$$J = -\frac{\theta}{12(-W)^{\frac{5}{2}}}.$$

La quantité θ n'est invariante que si V est nul; mais il existe un invariant du cas général qui se réduit à θ si V devient nul. On l'obtient en changeant de variable de manière à rendre s_7 constant. Son expression par les invariants fondamentaux est la suivante:

$$\theta = \frac{1}{v^2}\left[2\partial\left(\frac{7}{6}s_7\right)^2 + \frac{5\cdot 7^2}{2}s_9 s_7 - \frac{5\cdot 7^2}{2}s_8^2\right],$$

d'où l'on peut chasser ∂ par l'emploie de la formule (16).

18. Les deux premiers invariants absolus qu'on puisse former, dans le cas général, sont $\frac{s_7^3}{v^4}$ et $\frac{t_7^3}{v^8}$. Dans le cas où v est nul, on a pour premier invariant absolu $\frac{\theta^2}{w^5}$.

Quand ces invariants absolus sont des constantes, l'équation réduite est à coefficients constants; la courbe attachée est ce que j'appelle une courbe *anharmonique*.

Quand, v étant nul, le premier invariant absolu est constant, l'équation réduite manque du premier et du troisième terme. L'équation caractéristique est donc bicarrée: soient $\pm\alpha$, $\pm\beta$ ses racines. Les intégrales sont $e^{\pm\alpha\xi}$, $e^{\pm\beta\xi}$. Donc quatre intégrales satisfont à la condition $\eta_1\eta_4 = \eta_2\eta_3$. De là une proposition de géométrie: *toute courbe anharmonique, dont les tangentes appartiennent à un même complexe linéaire, est située sur une surface du 2^d degré.* On verra plus loin (n° 26) une réciproque de cette proposition.

19. La dualité géométrique s'introduit par la considération de l'équation *adjointe*, due à Lagrange.

Soit l'équation

$$y^{\mathrm{IV}} + 6p_2y'' + 4p_3y' + p_4y = 0;$$

son adjointe est

$$z^{\mathrm{IV}} + 6(p_2z)'' - 4(p_3z)' + p_4z = 0,$$

ou bien, développée:

$$z^{\mathrm{IV}} + 6p_2z'' - 4(p_3 - 3p_2')z' + (p_4 - 4p_3' + 6p_2'')z = 0.$$

En désignant par c_1, c_2, c_3, c_4 des constantes arbitraires, on a pour z l'expression suivante par les intégrales y:

$$z = (c_1y_2y_3'y_4'').$$

Ainsi les courbes attachées aux deux équations adjointes se correspondent dans la dualité géométrique.

En rangeant dans une même classe toutes les équations susceptibles d'être ramenées à une même forme réduite, ou, ce qui revient au même, à qui est attachée une seule et même courbe, on voit que les adjointes des équations d'une seule classe forment elles-mêmes une seule classe. Ces deux classes sont *adjointes* l'une à l'autre.

Les invariants d'une équation sont également invariants pour l'adjointe.

En faisant le calcul de l'adjointe pour l'équation (17), on retrouve cette équation elle-même. Ainsi *chaque classe, dont l'invariant v est nul, est à elle-même sa propre adjointe.* Sous forme géométrique, voici la même proposition: *les lignes droites qui, faisant partie d'un complexe linéaire, enveloppent une courbe, constituent une figure corrélative à elle-même.*

D'après la proposition du n° 18, *toute courbe anharmonique dont les tangentes appartiennent à un même complexe linéaire, est arête de rebroussement d'une développable circonscrite à une surface du 2^d degré.* (1)

20. Faisons maintenant le calcul de l'adjointe pour l'équation générale, mais réduite:

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} + 2H\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + 2\left(\frac{dH}{d\xi} - 1\right)\frac{d\eta}{d\xi} + K\eta = 0.$$

Nous obtenons

$$\frac{d^4\zeta}{d\xi^4} + 2H\frac{d^2\zeta}{d\xi^2} + 2\left(\frac{dH}{d\xi} + 1\right)\frac{d\zeta}{d\xi} + K\zeta = 0.$$

Pour réduire cette dernière, il suffit de changer la variable indépendante en prenant $\xi_1 = -\xi$, pour cette variable. Donc, dans le passage d'une équation à son adjointe, les invariants H et K se conservent, tandis que V se reproduit, sauf le signe. Ce dernier fait se vérifie aisément par

---

(1) Les deux surfaces du 2^d degré, sur l'une desquelles est l'arête de rebroussement, tandis que la développable est circonscrite à l'autre, ont en commun un quadrilatère gauche. Les tangentes communes aux deux surfaces se partagent en deux congruences distinctes. Ce cas remarquable de décomposition a été trouvé par M. ARCHER HIRST, qui me l'a communiqué verbalement, il y a quelques années.

l'expression de V; on reconnaîtra de même que S_7 se reproduit sans altération. Conséquemment S_n se reproduit au facteur $(-1)^{n-1}$ près.

Le dénominateur de H étant la puissance $\frac{8}{3}$ de V, et H se reproduisant, il en résulte que le numérateur de H se reproduit sans altération. C'est l'invariant Δ. À cause de la formule (16), on conclut que T_7 se se modifie et se change en $T_7 + \frac{8}{3}S_8$. Par suite, T_n se change en $(-1)^{n-1}\left(T_n + \frac{8}{3}S_{n+1}\right)$.

Grâce à ces observations, il sera facile de trouver, pour tout invariant, l'expression de son adjoint. Il suffit, à cet effet, de l'exprimer par les invariants fondamentaux, et d'y faire les changements dont je viens de parler.

21. J'ai terminé ici la théorie générale que j'avais en vue de traiter, et j'aborde les applications. Pour commencer ces applications, je reprends l'analyse traitée dans le n° 5 et suivie d'un exemple dans le n° 6. J'ai considéré, en cet endroit, une équation, dont l'invariant v est nul, et j'ai construit une transformée qui est généralement du 5^{ème} ordre. Dans l'exemple adopté, cette transformée manquait du dernier terme et s'abaissait ainsi au quatrième ordre. Je vais chercher le type général des équations qui donnent lieu à cette circonstance.

La transformée a pour premier membre

$$Z = (z''' + 6p_2z' + 4p_3z)'' + 6p_2(z''' + 6p_2z' + 4p_3z) - 4p_4z' - 2p_4'z.$$

Elle manque du dernier terme sous la condition

$$4p_3'' + 24p_2p_3 - 2p_4' = 0.$$

On a d'ailleurs, par hypothèse,

$$2p_3 - 3p_2' = 0.$$

Désignant par g une fonction arbitraire, je satisfais à la dernière relation si je prends

$$p_2 = -\frac{1}{3}g, \quad p_3 = -\frac{1}{2}g'.$$

La première relation donne alors

$$p_4' = -g''' + 2gg'.$$

En intégrant, et désignant la constante d'intégration par $-\frac{1}{4}c^2$, j'ai donc

$$p_1 = g^2 - g'' - \frac{1}{4}c^2.$$

Ainsi le type général des équations dont il s'agit est le suivant

$$(18) \qquad y^{\mathrm{IV}} - 2gy'' - 2g'y' + \left(g^2 - g'' - \frac{1}{4}c^2\right)y = 0.$$

Calculant Z et faisant $z' = \zeta$, j'ai la transformée

$$(19) \qquad \zeta^{\mathrm{IV}} - 4g\zeta'' - 6g'\zeta' + (c^2 - 2g'')\zeta = 0.$$

Cette équation (19) ne contenant, dans ses coefficients, qu'une seule fonction g, n'est pas susceptible d'être transformée, par les substitutions (2), en une équation quelconque. La classe, dont elle est un type, possède, en effet, une propriété invariante, provenant de ce fait que les coordonnées de la droite dans l'espace sont liées par une relation quadratique. Pour parler le langage de l'algèbre, disons que les six déterminants $\zeta = (y_i y_j'')$, formés avec quatre intégrales de (18), sont liés par une relation quadratique. D'après l'identité $v = 0$, ils sont liés aussi par une relation linéaire, et se réduisent ainsi à *cinq*, distincts entre eux. Mais, l'équation transformée s'étant abaissée au quatrième ordre, un de ces déterminants ζ est nul. Donc la relation quadratique existe entre les quatre autres. Donc *les intégrales de l'équation* (19) *sont liées par une relation quadratique à coefficients constants.*

Pour préciser cette relation, posons

$$\zeta_{ij} = y_i y_j'' - y_j y_i''. \qquad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Nous avons

$$\zeta_{12}\zeta_{34} - \zeta_{13}\zeta_{24} + \zeta_{14}\zeta_{23} = 0.$$

Supposons les y choisis de telle sorte que ζ_{12} soit nul. Il reste

$$\zeta_{13}\zeta_{24} = \zeta_{14}\zeta_{23}.$$

L'équation (18) peut s'écrire ainsi:

$$\left[y'' - \left(g - \frac{1}{2}c\right)y\right]'' - \left(g + \frac{1}{2}c\right)\left[y'' - \left(g - \frac{1}{2}c\right)\right] = 0.$$

Elle admet donc les intégrales φ_1, φ_2 de l'équation du second ordre:

$$\varphi'' = \left(g - \frac{1}{2}c\right)\varphi. \tag{20}$$

Comme on ne change pas (18) par le changement de c en $-c$, elle admet aussi les intégrales ψ_1, ψ_2 de cette autre:

$$\psi'' = \left(g + \frac{1}{2}c\right)\psi. \tag{21}$$

Si nous prenons

$$y_1 = \varphi_1, \quad y_2 = \varphi_2, \quad y_3 = \psi_1, \quad y_4 = \psi_2,$$

nous aurons

$$\zeta_{12} = 0, \quad \zeta_{34} = 0, \quad \zeta_{13} = c\varphi_1\psi_1, \quad \zeta_{14} = c\varphi_1\psi_2, \quad \zeta_{23} = c\varphi_2\psi_1, \quad \zeta_{24} = c\varphi_2\psi_2.$$

Ainsi *l'équation* (19) *a pour intégrales les produits de celles des équations* (20) *et* (21), *et l'équation* (18) *a, pour intégrales, celles mêmes des équations* (20) *et* (21).

Il n'est pas sans intérêt de remarquer la conséquence suivante:

$$\varphi\psi'' - \psi\varphi'' = c\varphi\psi.$$

$$c\int\varphi\psi dx = \varphi\psi' - \psi\varphi'. \tag{22}$$

22. Pour l'exemple choisi au n° 6, les équations (20) et (21) sont comprises dans la forme ambigüe

$$\varphi'' = \left[n(n+1)\wp(u) \pm \frac{1}{2}c\right]\varphi,$$

où, suivant l'usage, je désigne par u la variable indépendante. La constante α, de l'équation (6), s'exprime ainsi:

$$\alpha = \frac{n^2(n+1)^2}{12}g_2 - \frac{1}{4}c^2.$$

Prenons, en particulier, ce cas

$$n = \frac{3}{2}, \quad c = \sqrt{3g_2}.$$

Vous avons pour φ les intégrales suivantes (n° 47)

$$\varphi_1 = \wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left[\wp\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{1}{6}\sqrt{3g_2}\right]$$

$$\varphi_2 = \wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left[\wp^3\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{\sqrt{3g_2}}{2}\wp^2\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{1}{3}g_3\right].$$

En changeant le signe de $\sqrt{3g_2}$, on a ψ_1 et ψ_2. Il en résulte pour y la forme:

$$y = \wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\mathfrak{F}\left[\wp\left(\frac{u}{2}\right)\right],$$

où $\mathfrak{F}$ est un polynôme arbitraire du 3ème degré. Nous avons déjà trouvé cette intégrale au n° 13 pour une équation formée par un autre moyen. En effectuant le calcul, on retrouve bien ici cette même équation.

23. Les propriétés de l'équation (19) ont été établies d'une manière indirecte. Il convient d'établir directement que cette équation est le type de toute équation du quatrième ordre entre les intégrales de laquelle existe une relation quadratique.

Soit une telle équation, et supposons la relation quadratique reductible à la forme

$$Y_1 Y_4 = Y_2 Y_3.$$

Prenant pour nouvelle variable x et pour nouvelle inconnue y

$$x = \frac{Y_3}{Y_4}, \quad y = \frac{Y}{Y_4},$$

j'ai une transformée admettant les solutions 1, x, $\frac{Y_1}{Y_4}$, $\frac{Y_2}{Y_4}$. En désignant

$\frac{Y_2}{Y_4}$ par α, j'ai pour $\frac{Y_1}{Y_4}$ l'expression αx. Ainsi la transformée admet les solutions 1, x, α, αx. Considérons les deux équations

$$y'' = 0, \quad y'' = \frac{\alpha''}{\alpha'} y'.$$

La première admet les solutions 1, x; la seconde 1, α. Les quatre produits des intégrales de la première par les intégrales de la seconde sont 1, x, α, αx, c'est à dire les intégrales de la transformée. Revenant à la proposée et transformant en même temps, d'une manière convenable, les deux équations du 2^d ordre, je peux conclure ainsi: *toute équation du $4^{ème}$ ordre dont les intégrales sont liées par une relation quadratique, à discriminant différent de zéro, a pour intégrales les produits des intégrales de deux équations du 2^d ordre.* [1]

24. Soient deux équations du second ordre, avec la même variable indépendante:

$$\frac{d^2A}{dX^2} + 2P_1\frac{dA}{dX} + P_2A = 0, \quad \frac{d^2B}{dX^2} + 2Q_1\frac{dB}{dX} + Q_2B = 0.$$

Si l'on y change les deux inconnues A, B de manière à faire disparaître le second terme dans chacune, les seconds coefficients deviennent respectivement $P_2 - P_1^2 - P_1'$ et $Q_2 - Q_1^2 - Q_1'$. L'égalité de ces deux quantités exprime donc que les intégrales A sont proportionnelles aux intégrales B. Cette propriété étant indépendante de X, on voit que la combinaison

$$F = Q_2 - Q_1^2 - Q_1' - (P_2 - P_1^2 - P_1')$$

est un invariant des équations simultanées. Si donc cet invariant n'est pas nul, on pourra changer la variable indépendante de manière à rendre cet invariant égal à un nombre à volonté. Je laisse ce nombre indéterminé et le désigne par c. Si, en même temps, je change les inconnues pour faire disparaître les seconds termes, j'obtiens la forme réduite:

$$(23) \qquad \frac{d^2a}{dx^2} = \left(g + \frac{1}{2}c\right)a, \quad \frac{d^2b}{dx^2} = \left(g - \frac{1}{2}c\right)b.$$

[1] Voyez, à ce sujet, une note de M. Goursat, intitulée *Sur une classe d'équations linéaires du 4^{me} ordre* (Comptes-Rendus, XCVII, p. 31).

La lettre g désigne une fonction de la variable, invariant absolu. Faisons maintenant

$$y = ab.$$

Les différentiations successives donnent:

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{db}{dx} + b\frac{da}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{da}{dx}\frac{db}{dx} + 2gab$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - 2gy\right) = 2g\frac{dy}{dx} + c\left(a\frac{db}{dx} - b\frac{da}{dx}\right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - 2gy\right) - 2\frac{d}{dx}\left(g\frac{dy}{dx}\right) = -c^2ab.$$

Donc enfin y satisfait à l'équation:

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 4g\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dg}{dx}\frac{dy}{dx} + \left(c^2 - 2\frac{d^2y}{dx^2}\right)y = 0. \tag{24}$$

D'après la proposition dont l'énoncé termine le n° 23, nous pouvons conclure ainsi: *toute équation du quatrième ordre dont les intégrales sont liées par une relation quadratique est réductible par une substitution de la forme (1) au type (24). La constante c est à volonté, sauf zéro, si le discriminant de la relation quadratique n'est pas nul.*

En complétant, d'une manière bien aisée, l'analyse précédente, on peut ajouter que, *si le discriminant est nul, la forme (24) subsiste; mais la constante c est nulle.*

Voici le problème qui se présente maintenant: *exprimer en fonction des coefficients la condition sous laquelle une équation est réductible à la forme (24); trouver la substitution qui opère cette réduction, et la fonction g.*

25. Pour résoudre ce problème, il s'offre une voie indirecte que je ne suivrai pas, mais que j'indiquerai néanmoins. C'est une conséquence de la relation (22).

Envisageons le déterminant formé avec trois fonctions et leurs premières et secondes dérivées, en choisissant pour ces fonctions $\varphi_1\psi_1$, $\varphi_2\psi_1$, $\varphi_1\psi_2$.

Tenant compte de ce que les φ et ψ satisfont aux équations (20) et (21), on obtient, par un calcul facile, l'expression suivante de ce déterminant, à un facteur constant près:

$$[\varphi_1\psi_1(\varphi_2\psi_1)'(\varphi_1\psi_2)''] = \psi_1\varphi_1' - \varphi_1\psi_1'.$$

D'après (22), ceci est l'intégrale de $c\varphi_1\psi_1$.

On conclut de là que l'équation adjointe de (19) est vérifiée par les intégrales des solutions de l'équation (19) elle-même. Cette propriété se reconnait d'ailleurs avec facilité sur l'équation. Effectivement son adjointe est

$$\eta^{\mathrm{IV}} - 4g\eta'' - 2g'\eta' + c^2\eta = 0.$$

En dérivant cette dernière et faisant $\eta' = \zeta$, on retrouve l'équation (19).

Soit maintenant une équation, de la forme générale (1). Avec trois de ses intégrales on obtient une intégrale de l'adjointe ainsi

$$Z = [Y_1 Y_2' Y_3''] e^{4\int P_1 dX}.$$

En employant la substitution générale (2), on pourra écrire

$$Z = u^3\mu^3 \left[y_1 \frac{dy_2}{dx} \frac{d^2y_3}{dx^2}\right] e^{4\int P_1 dX}.$$

Supposons maintenant que la substitution envisagée transforme l'équation proposée en (24). Nous aurons alors:

$$Z = u^3\mu^3 e^{4\int P_1 dX} \int y dx = u^3\mu^3 e^{4\int P_1 dX} \int \frac{\mu}{u} Y dX.$$

En différentiant les deux membres de cette égalité, on peut conclure ainsi:

Toute équation du 4ème ordre dont les intégrales sont liées par une relation quadratique est caractérisée par la propriété suivante:

Soit $\Phi(Z) = 0$ son adjointe, et $F(Y) = 0$ la transformée de cette adjointe par la substitution

$$Y = AZ' + BZ,$$

où A et B sont des fonctions arbitraires: Il est possible de choisir A et B de telle sorte que $F(Y) = 0$ soit précisément l'équation proposée.

26. L'emploi de cette dernière proposition mène sans difficulté aux équations d'où dépend la solution du problème; mais d'une manière moins simple que la méthode ci-après.

Soit une équation, sans second terme, et à variable X

$$Y^{IV} + 6P_2 Y'' + 4P_3 Y' + P_4 Y = 0,$$

qu'il s'agit de transformer en l'équation (24). Je poserai, comme au n° 11,

$$\frac{dx}{dX} = \mu, \qquad \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dX} = \lambda.$$

Je dénoterai par des accents les dérivées prises par rapport à X. Dans l'équation (24), on a

$$p_2 = -\frac{2}{3}g, \quad p_3 = -\frac{3}{2}\frac{dg}{dx}, \quad p_4 = c^2 - 2\frac{d^2g}{dx^2}.$$

J'en conclus d'abord

$$30v = 3\frac{dp_2}{dx} - 2p_3 = \frac{dg}{dx} = \frac{1}{\mu}g'.$$

Avant de poursuivre, observons cette conséquence: *toute équation du 4ème ordre dont les intégrales sont liées par une relation quadratique, et dont l'invariant v est nul, est susceptible d'être transformée en une équation à coefficients constants.* En effet, l'hypothèse $v = 0$ exige que g soit une constante. De là une réciproque pour la proposition énoncée au n° 18: *toute courbe située sur une surface du 2d degré, et dont les tangentes appartiennent à un même complexe linéaire, est anharmonique.*

Le cas où v est nul doit être désormais écarté.

De la relation précédente, jointe à $V = \mu^3 v$, je déduis celle-ci:

$$\text{(I)} \qquad g' = \frac{30V}{\mu^2}.$$

C'est une première équation entre les inconnues g, μ. L'application de la formule (10) me donne cette autre:

$$\text{(II)} \qquad -4g = \frac{1}{\mu^2}\left(6P_2 - 5\lambda' + \frac{5}{2}\lambda^2\right),$$

à quoi il faut joindre

$$\text{(III)} \qquad \lambda = \frac{\mu'}{\mu}.$$

J'ai donc ainsi trois équations à trois inconnues g, μ, λ. En prenant pour μ une solution de ces équations, et déterminant y par la formule $y = Y\mu^{\frac{3}{2}}$, on aura une transformée telle que:

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^4y}{dx^4} - 4g\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dg}{dx}\frac{dy}{dx} + \gamma y = 0.$$

Dans le problème actuel, γ doit être $c^2 - 2\dfrac{d^2g}{dx^2}$. De là une nouvelle équation, qui entraîne une condition entre les données. J'aurai cette équation en calculant l'invariant s_7. Voici son expression

$$42 s_7 = c^2 - \frac{36}{25}g^2 + \frac{1}{5}\frac{d^2g}{dx^2}.$$

J'ai d'ailleurs:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{30V}{\mu^3}, \quad \frac{d^2g}{dx^2} = \frac{30}{\mu^4}(V' - 3\lambda V).$$

En conséquence, la nouvelle équation du problème est:

$$\text{(IV)} \qquad c^2 - \frac{36}{25}g^2 = \frac{6}{\mu^4}(7S_7 - V' + 3\lambda V).$$

Laissons d'abord cette dernière, et voyons comment se résout le système des trois premières équations. Pour ce but, on doit différentier l'équation (II), et chasser g'; μ^2 disparaît, et il reste:

$$\text{(V)} \qquad \lambda'' - 3\lambda\lambda' + \lambda^3 + \frac{12}{5}P_2\lambda - \frac{6}{5}(P_2' + 20V) = 0.$$

C'est de cette équation, à la seule inconnue λ, que dépend la réduction à la forme (A). Cette équation se ramène à la forme linéaire si l'on fait $\lambda = -\dfrac{\rho'}{\rho}$, c'est à dire $\rho = \dfrac{1}{\mu}$. La transformée est effectivement

$$\rho''' + \frac{12}{5}P_2\rho' + \frac{6}{5}(P_2' + 20V)\rho = 0.$$

Cette équation, du troisième ordre, que nous notons en passant, est, comme on voit, un *covariant* de l'équation proposée.

Prenons l'équation (IV), différentions les deux membres et remplaçons g et g' par les valeurs (I) et (II). De cette façon, μ disparait, et nous obtenons une nouvelle équation en λ:

$$\text{(VI)} \qquad \lambda' - \lambda^2 + \frac{V' - 4S_7}{3V}\lambda + \frac{7S'_7 - V''}{21V} - \frac{36}{35}P_2 = 0.$$

Il est à noter que cette dernière devient linéaire, elle aussi, avec l'inconnue ρ. Opérons différemment sur (IV) en y remplaçant g par son expression (II); et nous avons:

$$\text{(VII)} \qquad c^2\mu^4 = 6(7S_7 - V' + 3\lambda V) + \left(\frac{3}{10}\right)^2\left(6P_2 - 5\lambda' + \frac{5}{2}\lambda^2\right)^2.$$

Cette relation donne μ sans intégration, après qu'on a trouvé λ. Enfin la relation (II) donnera g.

La solution du problème dépend donc des équations simultanées (V) et (VI).

27. Ecrivons les équations simultanées (V), (VI) sous la forme abrégée

$$\text{(VIII)} \quad \left| \begin{array}{l} \lambda' - \lambda^2 + A\lambda + B = 0 \\ \lambda'' - 3\lambda\lambda' + \lambda^3 + C\lambda + D = 0, \end{array} \right.$$

différentions la première, éliminons λ'', puis éliminons λ' entre la résultante et la première; nous aurons ainsi cette valeur de λ:

$$\lambda = \frac{B' - D - AB}{C + A^2 + B - A'}.$$

En la substituant dans la première, nous aurons l'équation de condition.

Le calcul des deux termes de la fraction qui représente λ est un peu long; mais on y trouve un guide sûr, si l'on a soin de grouper les termes de manière à faire apparaître les invariants fondamentaux. A cet

effet, on chasse P_2 au moyen de l'invariant Δ, qu'on fait disparaître ensuite. Dans ce calcul, on voit s'introduire les deux invariants suivants:

$$(\mathrm{IX})\quad \left|\begin{aligned} M &= S_8 + 2T_7 + \frac{1}{6}S_7^2\\ N &= T_8 + \frac{4}{3}S_7T_7 - \frac{3}{2}V^4,\end{aligned}\right.$$

et l'on obtient finalement pour λ l'expression:

$$(\mathrm{X})\qquad \lambda = \frac{V' - 7S_7}{3V} + \frac{2N}{VM}.$$

Sans nous préoccuper, pour le moment, de l'équation de condition, calculons les deux autres inconnues.

La première équation (VIII) donne

$$6P_2 - 5\lambda' + \frac{5}{2}\lambda^2 = 6P_2 + 5B + 5A\lambda - \frac{5}{2}\lambda^2$$

sans différentiation. En y mettant la valeur (X) de λ, nous obtenons:

$$6P_2 - 5\lambda' + \frac{5}{2}\lambda^2 = -\frac{10}{V^2M^2}(M^2T_7 - MNS_7 + N^2).$$

Pour abréger, écrivons

$$(\mathrm{XI})\quad \left|\begin{aligned} &M^2T_7 - MNS_7 + N^2 = \Phi\\ &\Phi^2 + 4M^3NV^4 = \Psi.\end{aligned}\right.$$

Les relations (VII), (II) nous donnent:

$$(\mathrm{XII})\qquad c^2\mu^4 = \frac{9\Psi}{V^4M^4},\quad g\mu^2 = \frac{5\Phi}{2V^2M^2}.$$

28. Pour avoir l'équation de condition, au lieu de substituer λ dans la première équation (VIII), nous pouvons différentier logarithmiquement l'expression de μ, et égaler $\frac{\mu'}{\mu}$ à l'expression (X). De cette façon nous obtenons l'équation de condition sous la forme suivante:

$$(\mathrm{XIII})\qquad \frac{d}{dX}\log\frac{\Psi}{M^4V^{\frac{16}{3}}} = \frac{4}{3}\,\frac{6N - 7MS_7}{VM}.$$

Elle est explicitement sous forme invariante; car la quantité sous le signe logarithme est un invariant absolu.

L'équation (XIII) admet la solution particulière $\Psi = 0$. Cette condition répond à l'hypothèse $c = 0$, comme le montre la première équation (XII).

Supposons d'abord c différent de zéro. Les équations du 2^d ordre (23) sont comprises dans la forme ambigüe:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \left(g \pm \frac{1}{2}c\right)z.$$

En revenant à la variable X, on a la transformée:

$$\frac{d^2z}{dX^2} - \lambda\frac{dz}{dX} = \left(g\mu^2 \pm \frac{1}{2}c\mu^2\right)z.$$

Donc, d'après (XII):

$$\text{(XIV)} \qquad \frac{d^2z}{dX^2} - \left(\frac{V' - 7S_7}{3V} + \frac{2N}{VM}\right)\frac{dz}{dX} = \frac{5\Phi \pm 3V\Psi}{2V^2M^2}z.$$

Voici donc la conclusion:

L'égalité (XIII) *exprime la condition pour que les intégrales soient liées par une relation quadratique. Si Ψ n'est pas nul, on formera les deux équations du 2^d ordre comprises dans la formule* (XIV); *soient alors z_1 une solution de l'une d'elles, et z_2 une solution de l'autre. On aura Y par la formule*

$$Y = V^{-\frac{3}{2}}M^{-\frac{3}{2}}\Psi^{-\frac{3}{8}}z_1z_2.$$

En ce cas, la courbe attachée est sur une surface du 2^d degré, non conique; ou, en d'autres termes, *la relation quadratique a son discriminant différent de zéro.*

Supposons maintenant c nul. On a alors μ par une quadrature, ce qui modifie l'expression de Y, et voici la conclusion:

Si Ψ est nul, soient z_1 et z_2 deux intégrales de l'équation (XIV), *unique en ce cas, ces intégrales étant distinctes ou non. On aura trois intégrales Y par la formule*

$$Y = z_1z_2V^{-\frac{1}{2}}e^{\int -\frac{7MS_7 - 6N}{2VM}dX}.$$

La courbe attachée est sur un cône du 2^d degré; la relation quadratique a son discriminant égal à zéro.

Dans ma théorie des invariants différentiels, j'avais déjà trouvé l'équation $\Psi = 0$, pour celle des courbes tracées sur les cônes du 2^d degré.

Si M est nul, les équations simultanées (VIII) exigent que N soit nul aussi. La seconde équation (VIII) résulte alors de la première, et λ reste indéterminée. Donc *le système $M = 0$, $N = 0$ caractérise le cas où la courbe attachée est l'intersection commune d'une infinité de surfaces du 2^d degré.* Ces équations se trouvent également dans ma théorie des invariants différentiels. Pour ce cas, les formules finales sont en défaut; je reviendrai plus loin sur la solution qui s'y rapporte (nº 37).

29. Si l'on calcule l'équation de condition par la substitution de λ dans la première relation (VIII), on trouve le résultat suivant:

$$\text{(XV)} \qquad M(VN' - 4V'N) - N\left(VM' - \frac{8}{3}V'M\right) - 8M^2S_8 + \frac{2}{3\cdot5\cdot7}M^2\varDelta$$
$$+ \frac{1}{6}(MS_7 - 2N)(6N - 7MS_7) = 0.$$

Tous les termes sont des invariants qu'on peut aisément exprimer par les invariants fondamentaux: $\varDelta$ au moyen de la formule (16), M et N au moyen de (IX), et les autres ainsi:

$$VN' - 4V'N = 9T_9 + \frac{32}{35}(S_7T_8 + S_8T_7)$$

$$VM' - \frac{8}{3}V'M = 9S_9 + 16T_8 + \frac{8}{3}S_7S_8.$$

Le coefficient du terme en T_9 est, sauf un facteur numérique, l'invariant M. Dans l'équation (XIII), mise sous forme entière, ce coefficient est $M[\Phi(2N - MS_7) + 2M^3V^4]$. Ainsi *l'équation* (XIII) *est compliquée du facteur étranger* $\Phi(2N - MS_7) + 2M^3V^4$.

À son tour, *l'équation* (XV) *est compliquée du facteur* V^3, comme je vais le montrer maintenant. Mais il est impossible de faire disparaître ce facteur en conservant l'expression au moyen des invariants fondamentaux.

30. Le procédé, que j'ai seulement indiqué au n° 4, tout en fournissant l'équation de condition sous une forme illisible, pour ainsi dire, la donne cependant dégagée de tout facteur. C'est ce qu'avant tout nous allons reconnaître.

Prenant, pour point de départ, l'équation

$$y^{\mathrm{IV}} + 6p_2y'' + 4p_3y' + p_4y = 0,$$

posant $z = y^2$, différentiant successivement et abrégeant l'écriture par l'emploi des trois combinaisons

$$Z = z^{\mathrm{IV}} + 6p_2z'' + 4p_3z' + 2p_4z$$

$$Z_1 = Z' + 4p_4z'$$

$$Z_2 = Z_1' + 3p_2Z + 10p_4z'',$$

on trouve les équations ci-après:

$$z = y^2$$

$$z' = 2yy'$$

$$z'' = 2yy'' + 2y'^2$$

$$\text{(a)} \qquad z''' = 2yy''' + 6y'y''$$

$$\text{(b)} \qquad Z = 8y'y''' + 6y''^2 + 12p_2y'^2$$

$$\text{(c)} \qquad Z_1 = 20y''y''' - 24p_2y'y'' + 4(3p_2' - 8p_3)y'^2$$

$$Z_2 = 20y'''^2 - 126p_2y''^2 - 144p_3y'y'' + 4(3p_2'' - 8p_3' + 5p_4 + 9p_2^2)y'^2.$$

En différentiant cette dernière, chassant y^{IV} par le moyen de l'équation proposée, et $y''y'''$, $y'y'''$, yy''' par le moyen des équations (a), (b), (c), on obtient une nouvelle combinaison linéaire de z et de ses dérivées jusqu'au 7ème ordre, Z_3, dont l'expression a la forme:

$$Z_3 = \alpha_3y''^2 + \beta_3y'y'' + \gamma_3y'^2.$$

Différentiant deux fois en se servant encore des équations (a), (b), (c), on obtient deux équations analogues

$$Z_4 = \alpha_4 y''^2 + \beta_4 y'y'' + \gamma_4 y'^2$$

$$Z_5 = \alpha_5 y''^2 + \beta_5 y'y'' + \gamma_5 y'^2.$$

Ici Z_4 et Z_5 sont linéaires par rapport à z et ses dérivées jusqu'aux ordres 8 et 9 respectivement.

Pour que z satisfasse à une équation linéaire du 9ème ordre seulement, la condition est manifestement

$$(\alpha_3 \beta_4 \gamma_5) = 0.$$

Telle est la relation cherchée, dont le calcul serait encore assez pénible. Mais le poids du premier membre est mis en évidence. En effet, chaque β a son poids supérieur d'une unité à la quantité α de même indice, et chaque γ de deux unités. En outre, les indices des α sont égaux à leurs poids. Le déterminant est ainsi du poids 15. Le premier membre de l'équation (XV) est du poids 24; la différence est précisément égale au poids du facteur V^3, dont je vais prouver l'existence dans (XV). Ainsi l'équation actuelle est dégagée de ce facteur.

On observera, en outre, que les conditions pour l'existence d'une équation du 8ème ordre en z, sont:

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{matrix} \right\|.$$

Par conséquent, le système $M = 0$, $N = 0$ doit concorder avec cet autre: $(\alpha_3 \beta_4) = 0$, $(\alpha_3 \gamma_4) = 0$. M et N ont les poids 8 et 12, tandis que $(\alpha_3 \beta_4)$ et $(\alpha_3 \gamma_4)$ ont les poids 8 et 9. Il y a donc une combinaison des équations $M = 0$, $N = 0$ qui, contenant le facteur V, se réduit au poids 9. Cette circonstance, mise en évidence, facilite le calcul.

31. En ordonnant suivant les puissances croissantes de V, on reconnait que la combinaison $6N + (V' - 7S_7)M$ fournit un polynôme divisible par V. Introduisant cette combinaison, je pose

$$6N + (V' - 7S_7)M = R.$$

Pour condenser les formules, j'emploie les lettres minuscules et j'écris simplement s, au lieu de s_7. J'obtiens de la sorte:

$$\text{(XVI)}\quad \begin{aligned} M &= -\frac{1}{18}(v'-s)(v'-4s)+\frac{1}{3}\left(\frac{v''}{7}-\frac{5}{8}s'\right)v-\frac{6}{35}p_2v^2,\\ R &= -\frac{1}{2\cdot 3^2\cdot 7}(v'-s)(v''-7s')+\frac{1}{6}\left[\frac{9}{35}(4s-v')p_2+\frac{1}{4}\left(\frac{v'''}{7}-s''\right)\right]v\\ &\quad -\frac{3}{4\cdot 5\cdot 7}p_2'v^2-3v^3. \end{aligned}$$

Il est à remarquer que, d'après la formule (X), R est le numérateur de λ; et l'on a:

$$\lambda = \frac{R}{M}.$$

L'équation (XV) a été obtenue en mettant l'expression $\frac{VR}{VM}$, au lieu de λ, dans la première relation (VIII). Cette opération a exigé la multiplication par V^2. En mettant, pour λ, l'expression réduite $\frac{R}{M}$, on n'aura à multiplier que par le seul facteur V, provenant de ce que A et B contiennent ce facteur en dénominateur. Donc déjà le premier membre de (XV) contient un facteur V.

En second lieu, cette multiplication par V est superflue; effectivement l'équation où l'on substitue $\frac{R}{M}$ à λ est la suivante

$$\lambda' - \lambda^2 + A\lambda + B = 0.$$

La substitution donne

$$\text{(XVII)}\qquad M(R'+AR+BM)-R(M'+R)=0.$$

D'ailleurs les expressions de A et B sont les suivantes

$$\text{(XVIII)}\quad \begin{aligned} VA &= \frac{1}{3}(v'-4s),\\ VB &= \frac{1}{3\cdot 7}(7s'-v'')-\frac{36}{35}p_2v. \end{aligned}$$

En les comparant au premier terme de chacune des expressions (XVI), on voit que, dans $V(AR + BM)$, le terme indépendant de v disparaît. Donc la multiplication par V est superflue, et l'équation (XV) contient un second facteur V.

Enfin le résultat de la substitution contient lui-même le facteur v. Effectivement, en ne prenant que le premier terme, on trouve:

$$R' + AR + BM = -\frac{1}{2^3 \cdot 7^2}(v'' - 7s')(4v'' - 7s') + \ldots$$

$$-(M' + R) = -\frac{1}{2^3 \cdot 7}(v' - 4s)(4v'' - 7s') + \ldots$$

De là résulte, d'après (XVI), que le premier terme disparaît dans la combinaison (XVII).

Il est donc établi que le premier membre de l'équation (XV) contient le facteur V^3. D'ailleurs, il n'y a pas à chercher d'autre facteur étranger: en effet, le coefficient de $P_2^{(V)}$ est réduit maintenant à M, dans l'équation débarrassée du facteur V^3. Ce coefficient est indécomposable et ne peut disparaître.

32. Nous avons été conduits à cette théorie des équations réductibles au type (24) par l'exemple (7), rencontré au n° 6 de ce mémoire. Ainsi, dans la catégorie générale comprenant les équations (à variable indépendante u)

$$(25) \qquad y^{\mathrm{IV}} + \mathsf{a}\wp(u)y'' + \mathsf{b}\wp'(u)y' + [\mathsf{c}\wp''(u) + \mathsf{d}]y = 0,$$

figure, en premier lieu, le type

$$(26) \qquad y^{\mathrm{IV}} - 2\mathsf{e}\wp(u)y'' - 3\mathsf{e}\wp'(u)y' + [\mathsf{d} - \mathsf{e}\wp''(u)]y = 0,$$

comme étant explicitement sous la forme (24).

Je vais chercher, dans la catégorie (25), les équations qui, sans être du type (26), sont réductibles à la forme (24). En d'autres termes, le type (26) exclu, je vais chercher, parmi les équations (25), celles dont les intégrales sont liées par une relation quadratique.

Au lieu d'introduire explicitement les coefficients de (25), je prends pour inconnues des coefficients qui en dépendent, et je pose:

$$p_2 = 35a\wp(u), \quad v = b\wp'(u), \quad s_7 = c\wp''(u) + dg_2.$$

D'après les expressions (5) et (15) de v et de s_7, ces données entraînent, pour l'équation (25), les coefficients suivants:

$$(27)\quad \left|\begin{array}{l} \mathfrak{a} = 5 \cdot 6 \cdot 7a, \quad \mathfrak{b} = 5 \cdot 6 \cdot 7(a - 2b), \\ \mathfrak{c} = 3 \cdot 7\left(2c - \frac{10}{7}b + 3a + \frac{63}{2}a^2\right), \quad \mathfrak{d} = 3 \cdot 7\left(2d + \frac{63}{4}a^2\right)g_2. \end{array}\right.$$

33. Dans les formules qui vont suivre, j'écrirai simplement $\wp$, $\wp'$, .. au lieu de $\wp(u)$, $\wp'(u)$, ...

Au moyen des relations

$$\wp'' = 6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2, \quad \wp''' = 12\wp\wp', \quad \wp^{\mathrm{IV}} = 12(\wp'^2 + \wp\wp''),$$

on tire facilement des formules (XVI) les résultats suivants:

$$M = (\alpha\wp'' + \beta g_2)(\alpha_1\wp'' + \beta_1 g_2) + \gamma_1\wp\wp'^2,$$

$$\frac{1}{\wp'}R = \tau(\alpha\wp'' + \beta g_2)\wp + \gamma\wp'^2.$$

Les coefficients α, β, ... sont ainsi déterminés:

$$\alpha = \frac{4c - b}{6}, \quad \beta = \frac{2d}{3}, \quad \alpha_1 = \frac{b - c}{3}, \quad \beta_1 = -\frac{d}{3}, \quad \tau = \frac{b - 7c + 63ab}{7},$$

$$\gamma = -\frac{b}{2}\left[\frac{3}{2}b(a + 4b) + c - \frac{b}{7}\right]$$

$$\gamma_1 = b\left(\frac{4b}{7} - \frac{5c}{2} - 6ab\right).$$

La forme ci-dessus des expressions de M et R pouvait être prévue par raison d'homogénéité. En considérant $\wp$, $\wp'$, $\wp''$, ... comme des poids 2, 3, 4 et g_2, g_3 comme des poids 4, 6, on devait trouver pour M et R

des quantités homogènes, ayant les poids 8 et 9. Chaque quantité de poids impair doit contenir le facteur $\wp'$; et c'est ce qui a lieu pour R.

Sans effectuer les calculs, nous allons prévoir la forme des quantités qu'il reste à considérer.

La combinaison $M(R' + AR + BM) - R(M' + R)$ doit contenir le facteur v, par suite le facteur $\wp'$. Comme R contient ce facteur, il s'ensuit que $R' + AR + BM$ le contient aussi. Le quotient $\frac{1}{\wp'}(R' + AR + BM)$ est du poids 7, par suite contient encore le facteur $\wp'$. On a donc

$$\frac{1}{\wp'^2}(R' + AR + BM) = \alpha_2\wp'' + \beta_2 g_2.$$

On aura aussi

$$-\frac{1}{\wp'}(M' + R) = (\alpha_3\wp'' + \beta_3 g_2)\wp + \gamma_3\wp'^2.$$

Avec ces diverses expressions, on a pour l'équation de condition:

$$(28)\quad \left|\begin{array}{c}(\alpha\wp'' + \beta g_2)[(\alpha_1\wp'' + \beta_1 g_2)(\alpha_2\wp'' + \beta_2 g_2) + \gamma\wp'^2(\alpha_3\wp'' + \beta_3 g_2)] \\ + [\gamma_1(\alpha_2\wp'' + \beta_2 g_2) + \gamma(\alpha_3\wp'' + \beta_3 g_2) + \gamma\gamma_3(\alpha\wp'' + \beta g_2)]\wp\wp'^2 \\ + \gamma\gamma_3\wp'^4 = 0.\end{array}\right.$$

À propos des coefficients que je n'ai pas calculés jusqu'à présent, je ferai une simple observation: dans $-\frac{1}{\wp'}(M' + R)$, le terme en $\wp'^2$ provient de deux sources: 1° du terme analogue dans $-\frac{1}{\wp'}R$; 2° du dernier terme de M différentié. Par conséquent, on a:

$$(29)\qquad \gamma + \gamma_1 + \gamma_3 = 0.$$

L'équation (28) doit avoir lieu identiquement. Je l'ai partagée en trois lignes. Si les modules g_2 et g_3 sont tous deux différents de zéro, ce que je suppose, chacune des trois lignes doit être nulle séparément, comme on le voit sans peine. Donc l'un des coefficients γ, γ_3 doit être nul. Donc deux catégories de solutions à rechercher.

34. L'hypothèse $\gamma = 0$ conduit à deux solutions dans lesquelles R est identiquement zéro. L'une d'elles s'obtient par les seules suppositions $\gamma = 0$, $\tau = 0$. En effet, d'après (XVIII), on a:

$$(30) \qquad A = -\frac{2(\alpha \wp'' + \beta g_2)}{b\wp'}, \qquad B = -\frac{4\tau}{b}\wp.$$

Les quantités B, R étant nulles, l'équation de condition (XVII) est satisfaite d'elle-même.

Cette solution, qui laisse subsister deux arbitraires, nous conduit à l'équation (26), déjà connue, comme cela était évident. En effet, la circonstance $R = 0$, non accompagnée de $M = 0$, montre que λ est nul, et que, par conséquent, aucune transformation n'est nécessaire pour mettre l'équation sous la forme cherchée (24).

En fait, les équations $\gamma = 0$, $\tau = 0$ donnent

$$b = -\frac{7}{4}a, \qquad c = -\frac{a(1 + 63a)}{4},$$

et, par suite, les formules (27) entraînent, en posant $3 . 5 . 7a = -\mathbf{e}$,

$$\mathbf{a} = -2\mathbf{e}, \quad \mathbf{b} = -3\mathbf{e}, \quad \mathbf{c} = -\mathbf{e},$$

comme il le fallait vérifier.

35. La seconde solution est fournie par les hypothèses

$$\gamma = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma_1 = 0.$$

En ce cas, R et M sont tous deux nuls, et, par suite N est nul aussi. Comme je l'ai observé déjà (n° 28), c'est le cas où la courbe attachée à l'équation est l'intersection complète de deux surfaces du 2[d] degré. Tous les coefficients sont ici déterminés:

$$a = -\frac{1}{2^4 . 7}, \quad b = -\frac{1}{2^6}, \quad c = -\frac{1}{2^5}, \quad d = 0.$$

Les équations (27) conduisent ainsi à l'équation

$$(31) \qquad y^{\mathrm{IV}} - \frac{15}{8}\wp(u)y'' - \frac{15}{16}\wp'(u)y' + \left[\frac{3^3}{2^{10}}g_2 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^9}\wp''(u)\right] = 0.$$

À cette équation est attachée la courbe biquadratique. [1]

---

[1] *Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires,* pages 109 et 137.

Je vais achever l'application des calculs à cette équation (31). On a déjà observé (n° 28) que l'inconnue λ, en ce cas spécial, reste indéterminée. Elle est fournie par la seule équation

$$\lambda' - \lambda^2 + A\lambda + B = 0,$$

qui devient

$$\rho'' + A\rho' = B\rho$$

si l'on fait $\lambda = -\frac{\rho'}{\rho}$. Or, d'après (30), cette dernière équation devient:

$$\rho'' = \frac{3}{4}\mathfrak{p}(u)\rho,$$

dont nous avons déjà employé l'intégrale générale au n° 13. C'est

$$\rho = \mathfrak{p}'\left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\,\mathfrak{p}\left(\frac{u}{2}\right)\right].$$

Revenant à l'équation (II), nous avons

$$-4g\mu^2 = 6p_2 + 5B - \frac{5}{2}\lambda^2 = \frac{15}{8}\mathfrak{p}(u) - \frac{5}{2}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2.$$

$$g\mu^2 = -\frac{15}{32}\mathfrak{p}(u) + \frac{5}{8}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2.$$

La méthode générale consiste à trouver $c^2\mu^4$ par l'équation (VII); mais, pour simplifier le calcul, on observe qu'ayant

$$\lambda = -\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\mu'}{\mu},$$

on a μ à un coefficient numérique près; c'est l'inverse de ρ. L'équation (VII) sert à déterminer ce coefficient comme il suit.

Si l'on donne à u une valeur qui rende λ infini, la partie principale de $c^2\mu^4$, d'après (VII), est la même que celle de $\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{5}{2}\right)^2\lambda^4$. Ainsi $c\mu^2$ devient infini comme $\frac{3\lambda^2}{4}$. À cet infini correspond un zéro de ρ ou un

infini, et le résidu ± 1 pour λ. Donc $\mu\sqrt{c}$ a le résidu ± 1. D'après cette observation, on pourra mettre $c\mu^2$ sous la forme suivante, où w désigne un argument arbitraire:

$$c\mu^2 = \frac{3\wp'\left(\frac{u}{2}\right)\wp'\left(\frac{w}{2}\right)}{16\left[\wp\left(\frac{u}{2}\right) - \wp\left(\frac{w}{2}\right)\right]^2}.$$

Écrivons l'expression de $g\mu^2$ sous une autre forme, en remplaçant $\frac{15}{32}\wp(u)$ par $\frac{5}{8}\frac{\rho''}{\rho}$. Il vient ainsi:

$$g\mu^2 = \frac{5}{8}\left(\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 - \frac{\rho''}{\rho}\right) = \frac{5}{8}\lambda'.$$

Nous avons, en conséquence, pour l'équation du 2^d ordre cherchée:

$$\text{(32)} \qquad \frac{d^2z}{du^2} - \lambda\frac{dz}{du} = \left[\frac{5}{8}\frac{d\lambda}{du} \pm \frac{3}{32}\frac{\wp'\left(\frac{u}{2}\right)\wp'\left(\frac{w}{2}\right)}{\left[\wp\left(\frac{u}{2}\right) - \wp\left(\frac{w}{2}\right)\right]^2}\right]z,$$

formule où λ a la valeur suivante:

$$\text{(33)} \qquad \lambda = \frac{1}{4}\frac{\wp''\left(\frac{u}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{u}{2}\right)} - \frac{1}{2}\frac{\wp'\left(\frac{u}{2}\right)}{\wp\left(\frac{u}{2}\right) - \wp\left(\frac{w}{2}\right)}.$$

36. Pour intégrer l'équation (32), changeons les variables. Prenons pour variable indépendante $\frac{1}{2}u$; en même temps, introduisons $\frac{w}{2}$ au lieu de w:

$$u = 2\alpha, \quad w = 2\beta.$$

Soient aussi:

$$\omega = \frac{\wp'(\alpha)}{[\wp(\alpha) - \wp(\beta)]^2}$$

$$\lambda = \frac{1}{4\omega}\frac{d\omega}{d\alpha}$$

$$z = \omega^{\frac{1}{4}}\zeta,$$

et prenons ζ pour nouvelle inconnue. La transformée est l'équation suivante:

$$\frac{d^2\zeta}{d\alpha^2} = \left[\frac{1}{16\omega}\frac{d^2\omega}{d\alpha^2} \pm \frac{3}{8}\omega\wp'(\beta)\right]\zeta.$$

Le coefficient de ζ, étant développé, devient:

$$\frac{3}{8}\left\{2\wp(\alpha) - \frac{\wp''(\beta)}{\wp(\alpha) - \wp(\beta)} + \frac{\wp'(\beta)[\wp'(\alpha) \pm \wp'(\beta)]}{[\wp(\alpha) - \wp(\beta)]^2}\right\} = \frac{3}{4}\wp(\alpha \mp \beta).$$

Ainsi la transformée n'est autre que

$$\frac{d^2\zeta}{d\alpha^2} = \frac{3}{4}\wp(\alpha \mp \beta)\zeta,$$

c'est à dire, sauf le changement de α en $\alpha \pm \beta$, la même équation que nous avons déjà rencontrée deux fois. Son intégrale est

$$\zeta = \wp'\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\mathbf{a} + \mathbf{b}\wp\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)\right].$$

Par suite, l'intégrale générale de (32) est:

$$z = \frac{\wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{1}{4}}}{\left[\wp\left(\frac{u}{2}\right) - \wp\left(\frac{w}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\wp'\left(\frac{u \mp w}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}\left[\mathbf{a} + \mathbf{b}\wp\left(\frac{u \mp w}{4}\right)\right].$$

Prenant deux valeurs de z qui répondent à des signes opposés de w, les multipliant entre elles et par le facteur $\mu^{-\frac{3}{2}}$, on a l'intégrale y de l'équation (31) sous la forme:

$$y = \wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} \left[\frac{\wp\left(\frac{u}{2}\right) - \wp\left(\frac{w}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{u-w}{4}\right)\wp'\left(\frac{u+w}{4}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\mathsf{a} + \mathsf{b}\wp\left(\frac{u+w}{4}\right) + \mathsf{c}\wp\left(\frac{u-w}{4}\right)\right.$$

$$\left. + \mathsf{d}\wp\left(\frac{u+w}{4}\right)\wp\left(\frac{u-w}{4}\right)\right].$$

Le second facteur est susceptible d'une transformation remarquable qui laisse apercevoir sa nature rationnelle; on a, en effet:

$$\frac{\wp(\alpha) - \wp(\beta)}{\wp'\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\wp'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = -\frac{\left[\wp\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \wp\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^4}{\left[\wp'\left(\frac{\alpha}{2}\right)\wp'\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^2}.$$

L'expression de y peut donc s'écrire:

$$y = \wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} \frac{\left[\wp\left(\frac{u}{4}\right) - \wp\left(\frac{w}{4}\right)\right]^2}{\wp'\left(\frac{u}{4}\right)} \left[\mathsf{a} + \mathsf{b}\wp\left(\frac{u+w}{4}\right) + \mathsf{c}\wp\left(\frac{u-w}{4}\right)\right.$$

$$\left. + \mathsf{d}\wp\left(\frac{u+w}{4}\right)\wp\left(\frac{u-w}{4}\right)\right].$$

Cette formule, où w est arbitraire, ne gagne pas en généralité à ce qu'on y laisse cette arbitraire subsister. Un facile examen permet de la réduire à la forme suivante:

$$(34) \qquad y = \wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{\mathsf{a} + \mathsf{b}\wp\left(\frac{u}{4}\right) + \mathsf{c}\wp'\left(\frac{u}{4}\right) + \mathsf{d}\wp''\left(\frac{u}{4}\right)}{\wp'\left(\frac{u}{4}\right)}.$$

Telle est la solution de l'équation (31).

L'arbitraire w correspond à chacune des surfaces du 2[d] degré passant par la courbe biquadratique. Quatre de ces surfaces se réduisent à des cônes. On retrouve cette circonstance dans l'équation (32), qui cesse d'être ambigüe quand w est une période.

37. Toute équation, pour laquelle les invariants M et N sont nuls, est une transformée de (31). Pour avoir la solution d'une telle équation, il n'y a donc qu'à trouver les variables u et y en fonction de X et Y. On y arrive aisément par le calcul des invariants absolus dans (31).

D'après les valeurs de b, c (n° 35), on a, pour l'équation (31):

$$v = -\frac{1}{2^6}\,\mathrm{p}'(u), \quad s_7 = -\frac{1}{2^8}\,\mathrm{p}''(u).$$

Il en résulte:

$$s_8 = \frac{1}{8}\left(v s_7' - \frac{4}{3} v' s_7\right) = \frac{1}{2^{17}}\left[\mathrm{p}''^2(u) - \mathrm{p}'(u)\,\mathrm{p}'''(u)\right].$$

On a d'ailleurs (IX)

$$0 = M = s_8 + 2t_7 + \frac{1}{6} s_7^2;$$

on en peut tirer t_7, et en conclure:

$$4t_7 + \frac{5}{3} s_7^2 = \frac{1}{2^{16}}\,\mathrm{p}'\mathrm{p}''' = \frac{3}{2^{14}}\,\mathrm{p}\mathrm{p}'^2.$$

En considérant les deux invariants absolus suivants Ω, Ω_1:

$$(35)\qquad \begin{cases} 12 + \dfrac{18 v^4 s_7}{\left(t_7 + \dfrac{5}{12} s_7^2\right)^2} = \dfrac{1}{\Omega}, \\[2ex] -\dfrac{1}{3}\dfrac{s_7\left(t_7 + \dfrac{5}{12} s_7^2\right)}{v^4} = \Omega_1, \end{cases}$$

on trouve ainsi:

$$\Omega = \frac{\mathrm{p}^2(u)}{g_2}, \qquad \Omega_1 = \frac{\mathrm{p}(u)\,\mathrm{p}''(u)}{\mathrm{p}'^2(u)}.$$

Il en résulte les formules suivantes:

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{g_3^2}{g_2^3} &= \frac{\Omega\left[(6-4\Omega_1)\Omega+\Omega_1-\frac{1}{2}\right]^2}{\Omega_1^2} \\ \mathfrak{p}(u) &= -\frac{g_3}{g_2}\,\frac{\Omega_1}{(6-4\Omega_1)\Omega+\Omega_1-\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right.$$

En conséquence: *pour une équation dans laquelle les invariants* (IX) *M et N sont nuls, l'intégrale générale est une fonction algébrique des coefficients et sa représentation par les fonctions elliptiques s'obtient ainsi:*

Au moyen des invariants absolus (35) *on calcule par les formules* (36) *le module et l'argument; et l'on a pour l'intégrale générale*

$$Y = \left(\frac{\mathfrak{p}'(u)}{V}\right)^{\frac{3}{2}} y,$$

où y est donné par la formule (34). Dans cet énoncé, *l'équation est supposée privée de son second terme.*

38. J'ai (n° 33) partagé les systèmes de constantes a, b, c, d qui rendent identique l'équation (28), en deux groupes: ceux qui font évanouir γ, et ceux qui font évanouir γ_3. Dans le premier de ces groupes, nous venons d'étudier deux cas. Une discussion facile fait reconnaître que ce groupe ne contient aucun autre système favorable. J'omets ici cette discussion, pour abréger, à cause de son résultat négatif; j'examine maintenant l'hypothèse $\gamma_3 = 0$.

L'égalité (29) donne ici $\gamma = -\gamma_1$. Donc l'évanouissement des termes composant la seconde ligne de (28) exige les conditions

$$(37)\qquad \alpha_2 = \alpha_3, \quad \beta_2 = \beta_3;$$

puis l'évanouissement de la première ligne exige la condition double:

$$\alpha_1\mathfrak{p}'' + \beta_1 g_2 = -\tau\mathfrak{p}^2 = \alpha_1\left(6\mathfrak{p}^2 - \frac{1}{2}g_2\right) + \beta_1 g_2.$$

Les conditions sont donc, outre (37), les suivantes:

$$(38) \qquad \gamma + \gamma_1 = 0, \quad 6\alpha_1 = -\tau, \quad \alpha_1 = 2\beta_1.$$

Mais je vais montrer que les conditions (37) sont comprises dans les relations (38). À cet effet, je forme, pour ce cas, l'équation (28) par un calcul direct, en substituant λ dans la relation

$$\lambda' - \lambda^2 + A\lambda + B = 0.$$

D'après (38) les valeurs de M et R (n° 33) donnent, pour λ, une expression très-simplifiée:

$$\lambda = \frac{R}{M} - \frac{p'}{p}.$$

En tenant compte des expressions (30) de A et B, on a ainsi:

$$\lambda' - \lambda^2 + A\lambda + B = -\frac{1}{bp}[bp'' - 2(\alpha p'' + \beta g_2) + 4\tau p^2].$$

À cause de (38), la parenthèse peut s'écrire

$$bp'' - 2(\alpha p'' + \beta g_2) + 4(\alpha_1 p'' + \beta_1 g_2),$$

et se réduit à zéro, d'après les valeurs de α, α_1, β, β_1 (n° 33). Il est donc établi que les trois conditions (38) suffisent. Elles laissent subsister une arbitraire b, et donnent:

$$a = -\frac{4}{21}\left(b + \frac{1}{2}\right), \quad c = \frac{b}{7}(3 - 4b), \quad d = -\frac{2b(b+1)}{7}.$$

En employant les formules (27), et désignant $5b + 1$ par $\frac{n(n+1)}{2}$, on a, de la sorte, l'équation suivante:

$$(39) \qquad y^{\mathrm{IV}} - 4(n^2 + n + 3)p(u)y'' - 10n(n+1)p'(u)y' + 3g_2 y = 0.$$

Voici donc une nouvelle équation dont les intégrales sont liées par une relation quadratique. La constante n est arbitraire.

39. En achevant les calculs, nous allons trouver les équations du 2^d ordre auxquelles se ramène l'équation (39).

La relation II (n°. 26) nous donne ici:

$$g\mu^2 = (n+2)(n-1)\wp(u) - \frac{5}{8}\frac{g_3}{\wp^2(u)}.$$

D'après la valeur de λ, μ ne diffère de $\frac{1}{\wp(u)}$ que par un coefficient constant. Nous déterminons ce coefficient au moyen de la relation (VII), comme nous l'avons fait, dans un cas analogue, au n° 36, et nous trouvons

$$c\mu^2 = \pm\frac{3}{4}\frac{g_3}{\wp^2(u)}.$$

Nous parvenons ainsi à l'équation ambigüe:

$$\frac{d^2z}{du^2} + \frac{\wp'(u)}{\wp(u)}\frac{dz}{du} = \left[(n+2)(n-1)\wp^3(u) - \frac{5}{8}g_3 \pm \frac{3}{8}g_3\right]\frac{z}{\wp^2(u)}.$$

Ici nous distinguerons les équations données par les deux signes. Pour le signe $+$, nous changerons de variable en posant

$$z = \eta\wp^{-\frac{1}{2}}(u).$$

La transformée n'est autre que l'équation de Lamé:

$$(40) \qquad \frac{d^2\eta}{du^2} = n(n+1)\wp(u)\eta.$$

Pour l'équation au signe —, en appelant z_1 l'inconnue, nous ferons

$$z_1 = \zeta\wp(u)^{-1},$$

et voici la transformée:

$$(41) \qquad \wp(u)\frac{d^2\zeta}{du^2} - \wp'(u)\frac{d\zeta}{du} = \left[n(n+1)\wp^2(u) + \frac{1}{2}g_2\right]\zeta.$$

On aura, d'autre part,

$$y = \mu^{-\frac{3}{2}}zz_1 = \wp(u)^{\frac{3}{2}}\cdot\wp(u)^{-\frac{1}{2}}\eta\cdot\wp(u)^{-1}\zeta = \eta\zeta.$$

Donc *l'équation* (39) *a pour intégrales les produits des intégrales des équations* (40) *et* (41) *entre elles.*

40. Parmi les cas où l'on peut intégrer les équations (40) et (41), j'en veux d'abord signaler à part le plus intéressant, qui présente un caractère singulier. C'est celui où l'on suppose $n = \frac{1}{2}$. L'équation (40), nous l'avons déjà dit, a l'intégrale générale

$$\eta = p'(u)^{-\frac{1}{2}}\left[\mathbf{a} + \mathbf{b}\,p\left(\frac{u}{2}\right)\right].$$

Quant à l'équation (41), son intégrale que nous vérifierons plus loin (n° 48), est:

$$\zeta = p'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left[\mathbf{a}_1\left\{p\left(\frac{u}{2}\right)^3 + \frac{1}{4}g_2\,p\left(\frac{u}{2}\right) - g_3\right\} + b_1\left\{p\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}g_2\right\}\right].$$

Multipliant entre elles les intégrales η, ζ correspondant à

$$\mathbf{a} = 1, \qquad \mathbf{b} = 0; \qquad \mathbf{a}_1 = 1, \qquad \mathbf{b}_1 = 0;$$

puis celles qui correspondent à

$$\mathbf{a} = 0, \qquad \mathbf{b} = -1; \qquad \mathbf{a}_1 = 0, \qquad \mathbf{b}_1 = 1:$$

et ajoutant les deux produits, nous formons l'intégrale particulière de (39)

$$y = \frac{1}{p'^2\left(\frac{u}{2}\right)},$$

qui suffit seule à trouver toutes les autres. En effet, la double périodicité des coefficients, dans l'équation (39), montre qu'en ajoutant des périodes à une intégrale, on reproduit encore une intégrale.

L'homogénéité de l'équation (39) permet, par le changement de u en cu, de supposer

$$p(u) = -\frac{1 + k^2}{3} + \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u}.$$

L'addition des périodes, dans l'intégrale ci-dessus, donne alors *l'intégrale générale de* (39), *pour* $n = \frac{1}{2}$, sous la forme: [1]

$$y = \frac{A + B\,\mathrm{sn}^8\frac{u}{2} + C\,\mathrm{cn}^8\frac{u}{2} + D\,\mathrm{dn}^8\frac{u}{2}}{\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}\,\mathrm{cn}^2\frac{u}{2}\,\mathrm{dn}^2\frac{u}{2}}.$$

Les intégrales sont proportionnelles à quatre polynômes, du $4^{\text{ème}}$ degré par rapport à la variable $\wp\left(\frac{u}{2}\right)$. Ainsi *la courbe attachée à l'équation* (39), *pour* $n = \frac{1}{2}$, *est la courbe gauche unicursale du* $4^{\text{ème}}$ *degré.* Cette courbe est, on le sait, l'intersection d'une surface du 2^{d} degré et d'une surface du $3^{\text{ème}}$ degré, qui ont en commun deux droites ne se rencontrant pas. La dernière forme de l'intégrale, si l'on fait $\mathrm{sn}^2\frac{u}{2} = t$, donne

$$\frac{y_1}{1} = \frac{y_2}{t^4} = \frac{y_3}{(1-t)^4} = \frac{y_4}{(1-k^2t)^4},$$

et met en évidence les quatre plans osculateurs stationnaires.

41. Voici maintenant, sur la même équation, une dernière remarque. En faisant $n = \frac{1}{2}$, nous voyons qu'elle s'écrit:

$$y^{\mathrm{IV}} - 15\wp(u)y'' - \frac{15}{2}\wp'(u)y' + 3g_2y = 0.$$

C'est un cas de l'équation

$$y^{\mathrm{IV}} - 4gy'' - 2g'y' + c^2y = 0,$$

---

(1) L'équation (39) est un cas particulier d'une équation intégrée dans mon mémoire *sur la réduction des équations différentielles* (page 274 et suivantes). Malheureusement, une faute, dans le calcul des coefficients de cette équation (en haut de la page 274), faute qu'il est aisé de corriger, masque la coïncidence de l'équation (39) avec celle qui se rencontre dans le mémoire cité.

envisagée au n° 25, adjointe de l'équation type (24). Ainsi l'équation actuelle est l'adjointe de l'équation (24), où l'on prend

$$g = \frac{15}{4} \mathfrak{p}(u), \qquad c^2 = 3g_2.$$

D'après le n° 25, considérons les équations

$$\varphi'' = \left(\frac{15}{4} \mathfrak{p}(u) - \frac{\sqrt{3g_2}}{2}\right)\varphi, \qquad \psi'' = \left(\frac{15}{4} \mathfrak{p}(u) + \frac{\sqrt{3g_2}}{2}\right)\psi,$$

et nous aurons $y = \varphi\psi' - \psi\varphi'$.

Déjà, au n° 22, nous avons indiqué les intégrales φ et ψ. En les employant, nous retrouverons l'intégrale y. C'est un calcul facile sur lequel je ne veux pas insister. On remarquera cette conséquence géométrique: *la développable, dont l'arête de rebroussement est la courbe unicursale du 4ème degré, est circonscrite à une surface du 2d degré.* On n'aurait qu'à achever le calcul précédent pour trouver l'équation de cette seconde surface, différente, bien entendu, de celle sur laquelle se trouve la courbe elle-même.

42. Voici un second cas de l'équation (39) qui mérite une mention spéciale; c'est le cas $n = 1$. L'équation est alors:

$$y^{\mathrm{IV}} - 20\mathfrak{p}(u)y'' - 20\mathfrak{p}'(u)y' + 3g_2 y = 0.$$

L'invariant v est nul. Par conséquent, c'est une transformée d'équation à coefficients constants.

Effectivement, les formules du n° 39 donnent ici, en supposant $c = 1$, ce qui est permis:

$$g\mu^2 = -\frac{5}{8}\frac{g_3}{\mathfrak{p}^2(u)}, \qquad \mu^2 = \frac{3}{4}\frac{g_3}{\mathfrak{p}^2(u)},$$

$$g = -\frac{5}{6}.$$

En employant la variable x, qui attribue aux équations du second ordre la forme primitive, on a:

$$\frac{dx}{du} = \frac{\sqrt{3g_3}}{2\mathfrak{p}(u)}, \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = \left(-\frac{5}{6} + \frac{1}{2}\right)z.$$

Ainsi, en posant

$$\alpha = \frac{ix}{\sqrt{3}} = \frac{i\sqrt{g_3}}{2}\int\frac{du}{\wp(u)},$$

on a, pour l'équation au signe $+$, les intégrales $e^{\pm\alpha}$; et, pour l'équation au signe $-$, les intégrales $e^{\pm 2\alpha}$.

Par suite, les intégrales y sont

$$y = \wp^3(u)[\mathsf{a}e^{-3\alpha} + \mathsf{b}e^{-\alpha} + \mathsf{c}e^{\alpha} + \mathsf{d}e^{3\alpha}],$$

proportionnelles, comme on voit, à quatre puissances consécutives d'une même quantité $e^{2\alpha}$. L'équation est donc un cas particulier de l'équation (13). Effectivement, c'est un cas de l'exemple cité au n° 13.

La quadrature, par laquelle s'obtient α, peut être effectuée comme il suit.

En employant les notations usuelles

$$\wp(u) = -\zeta'(u) = -\frac{d^2}{du^2}\log\sigma(u),$$

on a la formule fondamentale:

$$\frac{1}{2}\frac{\wp'(u) - \wp'(w)}{\wp(u) - \wp(w)} = \zeta(u + w) - \zeta(u) - \zeta(w).$$

Supposant $\wp(w) = 0$, ce qui entraîne $\wp'(w) = \pm i\sqrt{g_3}$, on en déduit

$$\pm\frac{i\sqrt{g_3}}{2}\int\frac{du}{\wp(u)} = \log\frac{e^{-u\zeta(w)}\sigma(u + w)}{\wp(u)^{\frac{1}{2}}\sigma(u)} = \pm\alpha.$$

Les deux signes de α correspondent aux deux signes de w. On déduit de là une nouvelle forme des intégrales z, et d'après les notations du n° 39,

$$\eta = e^{-u\zeta(w)}\frac{\sigma(u + w)}{\sigma(u)}, \tag{42}$$

pour intégrale de l'équation (40), savoir

$$\frac{d^2\eta}{du^2} = 2\wp(u)\eta.$$

On retrouve bien ainsi l'intégrale de ce cas particulier de l'équation de Lamé sous la forme habituelle d'une fonction doublement périodique de seconde espèce, forme adoptée par M. Hermite.

L'équation (41), pour ce cas $n = 1$, est en même temps intégrée. Ainsi l'équation

$$\wp(u)\frac{d^2\zeta}{du^2} - \wp'(u)\frac{d\zeta}{du} = \left(2\wp^2(u) + \frac{1}{2}g_2\right)\zeta$$

a les deux intégrales η^2, obtenues en mettant dans (42), l'une ou l'autre racine de $\wp(w) = 0$.

43. Mentionnons encore, pour l'équation (39), le cas $n = 0$, dans lequel l'équation (41) présente une circonstance curieuse. C'est

$$\wp(u)\frac{d^2\zeta}{du^2} - \wp'(u)\frac{d\zeta}{du} = \frac{1}{2}g_2\zeta.$$

En différentiant aux deux membres, on obtient, par disparition du facteur $\wp(u)$, le résultat suivant:

$$\frac{d^3\zeta}{du^3} = 6\wp(u)\frac{d\zeta}{du}.$$

La dérivée de ζ est ainsi l'intégrale d'une équation de Lamé. L'intégrale de cette équation se présentant d'elle-même sous la forme d'une dérivée, on a immédiatement ζ:

$$\zeta = \frac{\sigma(u+w)}{\sigma(u)} e^{-\left[\frac{\wp'(w)}{2\wp(w)} + \zeta(w)\right]u},$$

l'argument w étant l'une ou l'autre racine de $\wp(w) = -\frac{g_3}{g_2}$. [1] Soient ζ_1 et ζ_2 les deux fonctions comprises dans cette formule, on a, pour l'équation

$$y^{\mathrm{IV}} - 12\wp(u)y'' + 3g_2 y = 0,$$

les intégrales ζ_1, ζ_2, $u\zeta_1$, $u\zeta_2$.

---

[1] *Mémoire sur la réduction des équations différentielles* (page 99).

44. L'équation (40) est intégrable quand n est un nombre entier. Il en est tout autant de l'équation (41). Effectivement ses points singuliers s'obtiennent quand u est une période, ou bien une racine de $\wp(u)$. Les racines de $\wp(u)$ ne fournissent pas de point singulier pour l'équation (40), ni pour l'équation (39); comme on a d'ailleurs $y = \eta\zeta$, il en résulte que ζ reste uniforme aux environs d'une telle racine. D'autre part, quand u est une période, l'équation caractéristique de (41) a les racines n et $-(n+1)$, dont la différence est impaire. Comme les coefficients de $\frac{d^2\zeta}{du^2}$ et de ζ sont des fonctions paires et celui de $\frac{d\zeta}{du}$ une fonction impaire, la différence impaire des deux racines n'entraîne aucune condition subsidiaire pour l'existence d'intégrales appartenant à des exposants égaux à ces racines. Donc les intégrales de l'équation (41 sont des fonctions uniformes de la variable u, et l'on pourra, pour chaque valeur entière de n, les trouver par une méthode analogue à celle de l'équation de LAMÉ.

En conséquence, *l'équation* (39), que je transcris ici,

$$y^{\mathrm{IV}} - 4(n^2 + n + 3)\wp(u)y'' - 10n(n+1)\wp'(u)y' + 3g_2 y = 0$$

a son intégrale uniforme, partant est intégrable, quand n est un nombre entier.

Ce résultat mérite d'être remarqué, pour la raison suivante. Au point singulier, l'équation caractéristique a les racines 0, 6 et $\pm(2n+1)$. Les différences paires, d'après la forme de l'équation, n'impliquent des intégrales appartenant à des exposants égaux aux racines que sous le bénéfice d'une condition subsidiaire. Or on n'a aucun moyen direct, ce me semble, de vérifier cette condition à l'égard des deux dernières racines dont la différence est $4n + 2$, tandis que, par l'analyse précédente, on est assuré de l'existence de ces intégrales.

45. J'ai terminé l'examen des applications que j'avais en vue de traiter ici; il ne me reste, pour finir ce mémoire, qu'à expliquer comment s'intègrent deux équations du 2^{d} ordre, rencontrées dans le cours de ce travail, et dont j'ai supposé connues les intégrales.

L'équation de LAMÉ

$$\frac{d^2z}{du^2} = [n(n+1)\wp(u) + \alpha]z \tag{43}$$

s'intègre par les fonctions elliptiques de seconde espèce dans le cas où

n est un nombre entier, quelle que soit d'ailleurs l'arbitraire α. Elle a donné lieu, pour ce cas, à des études dues à M. Hermite. Mais, en outre, elle est intégrable aussi quand n est la moitié d'un nombre entier, pourvu que la constante α soit convenablement choisie. Dans un tel cas, l'intégrale est, en quelque sorte, plus simple qu'au cas précédent: c'est, au facteur $\wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-n}$ près, un polynôme entier de la variable $\wp\left(\frac{u}{2}\right)$. Ce polynôme contient une constante arbitraire, et son degré est égal à $2n$.

Deux cas de cette proposition ont été utilisés dans le mémoire actuel; ce sont les cas $n = \frac{1}{2}$ et $n = \frac{3}{2}$. Je vais établir ici, à nouveau, ce résultat qui se trouve d'ailleurs prouvé différemment dans mon mémoire *sur la réduction des équations différentielles.*

46. Soient: m un nombre entier, a, b, c des constantes données, et A, B, C, P quatre polynômes inconnus, tous quatre du degré $m - 1$ par rapport à une variable x. Pour fixer les idées, nous supposerons, dans chacun des polynômes, le coefficient unité pour le terme en x^{m-1}. On peut généralement trouver ces quatre polynômes de telle sorte que P, $(x-a)^m A$, $(x-b)^m B$, $(x-c)^m C$, soient liés par deux relations linéaires homogènes.

Effectivement, c'est là un problème déterminé, les quatre polynômes et les quatre constantes des deux relations linéaires fournissant $4m$ inconnues, tandis que les deux relations linéaires fournissent $4m$ équations.

Etant liés par deux relations linéaires, les quatre polynômes P, $(x-a)^m A$, $(x-b)^m B$, $(x-c)^m C$ sont les intégrales d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Soient α, β deux quelconques de ces polynômes; l'équation a la forme

$$(\alpha\beta')y'' - (\alpha\beta'')y' + (\alpha'\beta'')y = 0.$$

En prenant pour α le polynôme P, on voit que les degrés des coefficients sont, dans leur ordre respectif, $3m-3$, $3m-4$, $3m-5$. Si β est le polynôme $(x-a)^m A$, la racine a est multiple, dans ces polynômes, aux ordres respectifs $(m-1)$, $(m-2)$, $(m-2)$. Comme on peut prendre, au lieu de $(x-a)^m A$, chacun des deux autres polynômes analogues, la même conclusion subsiste pour b et c. Soit donc

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c);$$

les trois coefficients contiennent respectivement le facteur $f(x)$ avec les exposants $(m-1)$, $(m-2)$, $(m-2)$. Le facteur commun supprimé, on voit que le premier coefficient est $f(x)$. Le second coefficient, avant la suppression du facteur, était la dérivée du premier, changée de signe; il se réduit donc maintenant à $-(m-1)f'(x)$. Le dernier coefficient est du premier degré, et peut s'écrire, on le voit aisément, $\frac{(2m-1)(m-1)}{6}f''(x)+\beta$, où β est une constante dont la valeur n'est pas immédiatement connue. Ainsi:

$f(x)$ étant un polynôme du $3^{\text{ème}}$ degré, on peut choisir la constante β de telle manière que l'équation

$$(44)\qquad f(x)y''-(m-1)f'(x)y'+\left[\frac{(2m-1)(m-1)}{6}f''(x)+\beta\right]y=0$$

ait pour intégrale générale un polynôme entier.

Cette intégrale est du degré $(2m-1)$; un de ses cas particuliers se réduit au degré $(m-1)$. Cette intégrale particulière peut servir à déterminer β.

Effectivement l'équation différentielle fournit une relation récurrente, à quatre termes, entre les coefficients de l'intégrale. En formant cette relation, on trouvera aisément que l'existence d'une solution, du degré $(m-1)$, conduit à une équation de condition. Cette équation est, par rapport à l'inconnue β, du degré m. Ainsi *la constante β est donnée par une équation du $m^{\text{ème}}$ degré.*

On peut remarquer comment l'intervention de l'équation différentielle vient éclairer la solution du problème d'algèbre, posé au début. Voici, en effet, la conclusion: *les coefficients des polynômes inconnus A, B, C, P sont fonctions entières de la racine d'une équation de degré m.*

47. L'équation de Lamé (43), où l'on suppose n égal à la moitié d'un nombre entier, se réduit à la forme (44), par un changement des variables.

Soient, dans l'équation (43),

$$n=m-\frac{1}{2},\qquad \wp\left(\frac{u}{2}\right)=x,\qquad z=y\,\wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-m+\frac{1}{2}}.$$

En faisant usage de la formule de duplication:

$$\wp(u) = \frac{1}{4}\left[\frac{\wp''\left(\frac{u}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{u}{2}\right)}\right]^2 - 2\wp\left(\frac{u}{2}\right),$$

on trouvera, pour la transformée:

$$(4x^3 - g_2x - g_3)y'' - (m-1)(12x^2 - g_2)y' + 4[(2m-1)(m-1)x - \alpha]y = 0.$$

C'est précisément la forme (44). Donc *l'équation* (43), *où n est la moitié d'un nombre entier, soit* $\left(m - \frac{1}{2}\right)$, *a pour intégrale générale le produit de* $\wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-n}$ *par un polynôme entier en* $\wp\left(\frac{u}{2}\right)$, *du degré* $(2m-1)$. *Un cas particulier de ce polynôme se réduit au degré* $(m-1)$. *La constante α n'est pas arbitraire; c'est la racine d'une équation de degré m.*

Pour $m = 1$, il est manifeste que α doit être nulle. La transformée est $y'' = 0$. Pour $m = 2$, le calcul est très-simple, et mène au résultat que nous avons appliqué au n° 22; la constante α est $\pm\frac{\sqrt{3g_2}}{2}$. Il n'y a pas lieu d'examiner ici d'autres cas.

48. J'ai utilisé (n° 40) l'intégrale de l'équation

$$\wp(u)\frac{d^2\zeta}{du^2} - \wp'(u)\frac{d\zeta}{du} = \left(\frac{3}{4}\wp^2(u) + \frac{1}{2}g_2\right)\zeta.$$

On peut la vérifier facilement ainsi. Posant

$$\wp\left(\frac{u}{2}\right) = x, \quad \zeta = y\wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}},$$

on obtient la transformée:

$$\left(x^4 + \frac{1}{2}g_2x^2 + 2g_3x + \frac{1}{16}g_2^2\right)y'' - 2\left(2x^3 + \frac{1}{2}g_2x + g_3\right)y' + \left(6x^2 - \frac{1}{2}g_2\right)y = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$y = \mathsf{a}\left(x^3 + \frac{1}{4}g_2x - g_3\right) + \mathsf{b}\left(x^2 + \frac{1}{4}g_2\right).$$

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL RÉDIGÉ PAR

G. MITTAG-LEFFLER

3:1

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1883.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

REDACTION

Inhalt. Table des matières.

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

3:2

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1884.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

PARIS
A. HERMANN.
6 RUE DE LA SORBONNE

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

REDACTION

Inhalt. Table des matières.

Seite. Page.

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

3:3

STOCKHOLM

F. & G. BEIJER.

1884.

BERLIN

MAYER & MÜLLER.

38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

PARIS

A. HERMANN.

8 RUE DE LA SORBONNE

REDACTION

Inhalt. Table des matières.

À ce cahier est joint un numéro spécimen du journal Mathesis.

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

3:4

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1884.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

Inhalt. Table des matières.

Seite. Page.